

SERIE §3

4.11.2024

1. Scrivere il sistema di equazioni parametriche delle ellissi seguenti:

a) $e_1 : \frac{(x+3)^2}{10} + \frac{(y-4)^2}{2^2} = 1$

b) $e_2 : x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$

c) $e_3 : 3x^2 + y^2 - 2y = 15$

2. Traccia sullo stesso piano cartesiano i seguenti insiemi di punti (x, y) dati in forma parametrica (1 unità = 2 quadretti):

$$e : \begin{cases} x = 3 + 5 \cos(t) \\ y = -1 + 3 \sin(t) \end{cases} \quad \text{con } t \in [0; 2\pi[\qquad r : \begin{cases} x = 5 + 7t \\ y = -1 + 6t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

a) Cosa rappresentano l'insieme e e l'insieme r sul piano cartesiano? Scrivi una forma cartesiana sia di e sia di r .

b) Esistono punti di intersezione (x, y) tra gli insiemi e ed r ? In caso di risposta affermativa stabilisci le coordinate di tali punti.

c) Per $t = \frac{\pi}{6}$ si ottiene un punto $P(x_0, y_0)$ appartenente all'ellisse e . Stabilisci l'ampiezza (in radianti) dell'angolo $\alpha = \widehat{F_2CP}$, dove C è il centro dell'ellisse e F_2 è il fuoco destro.

d) Rifletti sul fatto che l'angolo trovato non è uguale a $\frac{\pi}{6}$, motiva dal punto di vista teorico questo risultato.

3. Dimostra algebricamente con dei calcoli appropriati* che l'insieme di punti (x, y) parametrizzati come di seguito, formano un'ellisse. Qual'è la sua eccentricità numerica ε ?

$$\begin{cases} x = \frac{2 \cos(t)}{\sqrt{1 + \sin^2(t)}} \\ y = \frac{2 \sin(t)}{\sqrt{1 + \sin^2(t)}} \end{cases} \quad \text{con } t \in [0; 2\pi[$$

4. Determina il valore del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ in modo tale che l'equazione

$$2kx^2 + 4ky^2 + x^2 - 1 = 0$$

rappresenti un'ellisse ...

a) ...passante per il punto $(\frac{1}{2}, -1)$;

b) ...qualsiasi con semiasse maggiore parallelo all'asse y ;

c) ...con i fuochi sull'asse x ed eccentricità numerica $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

*Potrebbe essere utile ricordare la seguente identità trigonometrica $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ per tutti i valori $t \in \mathbb{R}$.

5. Determinare l'equazione dell'ellisse avente centro in $C(2, 1)$, gli assi paralleli agli assi cartesiani, passante per il punto $A(-1, -1)$ e tangente alla retta di equazione $2x - y - 11 = 0$.
6. Dimostra che vale la seguente generalizzazione della formula di sdoppiamento per un'ellisse non centrata all'origine degli assi:

Data un'ellisse di centro $C(x_c, y_c)$ di equazione $\frac{(x-x_c)^2}{a^2} + \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1$ ed un punto $P(x_p, y_p)$ appartenente all'ellisse, allora la retta t tangente all'ellisse passante per P avrà equazione

$$t : \frac{(x_p - x_c)(x - x_c)}{a^2} + \frac{(y_p - y_c)(y - y_c)}{b^2} = 1$$