

## Serie 2: Soluzioni

### Esercizio 1

Si trovano anzitutto i punti per i quali devono passare le tangenti menzionate. Si noti che risolvendo con  $x = 2$  l'equazione cartesiana dell'ellisse si ottiene

$$\frac{2^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm \sqrt{\frac{10}{3}}$$

Si cercano quindi due rette tangenti all'ellisse. Una, chiamiamola  $t_1$ , tangente all'ellisse nel punto  $P_1 \left(2, \sqrt{\frac{10}{3}}\right)$  e l'altra  $t_2$  tangente all'ellisse nel punto  $P_2 \left(2, -\sqrt{\frac{10}{3}}\right)$ .

Utilizzando la formula di sdoppiamento con le coordinate di  $P_1$  si ricava l'equazione della retta  $t_1$

$$\frac{x_P x}{a^2} + \frac{y_P y}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{9} + \frac{\sqrt{\frac{10}{3}}y}{6} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 : y = -\frac{2\sqrt{30}}{15}x + \frac{3\sqrt{30}}{5}$$

Utilizzando la formula di sdoppiamento con le coordinate di  $P_2$  si ricava l'equazione della retta  $t_2$

$$\frac{x_P x}{a^2} + \frac{y_P y}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{9} + \frac{-\sqrt{\frac{10}{3}}y}{6} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t_2 : y = \frac{2\sqrt{30}}{15}x - \frac{3\sqrt{30}}{5}$$

Il punto di intersezione tra le due tangenti si trova nel punto di ascissa

$$-\frac{2\sqrt{30}}{15}x + \frac{3\sqrt{30}}{5} = \frac{2\sqrt{30}}{15}x - \frac{3\sqrt{30}}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{9}{2}$$

reiserendo in una delle due tangenti si trova l'ordinata corrispondente  $y = 0$ . Le due tangenti si intersecano nel punto  $\left(\frac{9}{2}, 0\right)$ , cioè sull'asse x. Osservazione questa deducibile anche a priori dalla simmetria della situazione.

### Esercizio 2

a) Leggendo i valori direttamente dall'equazione canonica dell'ellisse

$$\frac{(x+7)^2}{169} + \frac{(y-12)^2}{25} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-(-7))^2}{13^2} + \frac{(y-12)^2}{5^2} = 1$$

si ottiene che il centro è dunque  $C(-7, 12)$

I semiassi sono  $a = 13$  (maggiore) e  $b = 5$  (minore), con eccentricità lineare  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 12$  ed eccentricità numerica  $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{12}{13} \approx 0.92308$ , da cui segue che i vertici sono:

$$A_1(-20, 12)$$

$$A_2(6, 12)$$

$$B_1(-7, 7)$$

$$B_2(-7, 17)$$

mentre i fuochi sono dati da

$$F_1(-19, 12) \quad F_2(5, 12)$$

b) Cerchiamo di scrivere l'equazione dell'ellisse data nella forma canonica:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2} + \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1$$

dove  $C(x_c, y_c)$  è il centro. Con il completamento del quadrato possiamo scrivere che

$$x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \quad \text{e} \quad 4y^2 - 8y = 4(y^2 - 2y) = 4(y-1)^2 - 4$$

per cui l'equazione iniziale diventa

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 4y^2 - 8y + 1 = 0 &\Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + 4(y-1)^2 - 4 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + 4(y-1)^2 - 4 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow (x+1)^2 + 4(y-1)^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \boxed{\frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{(y-1)^2}{1^2} = 1} \end{aligned}$$

Il centro è dunque  $\boxed{C(-1, 1)}$

I semiassi sono  $a = 2$  (maggiore) e  $b = 1$  (minore), con eccentricità lineare  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$  ed eccentricità numerica  $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , da cui segue che i vertici sono:

$$\boxed{A_1(1, 1)}$$

$$\boxed{A_2(-3, 1)}$$

$$\boxed{B_1(-1, 2)}$$

$$\boxed{B_2(-1, 0)}$$

mentre i fuochi sono dati da

$$\boxed{F_1(\sqrt{3} - 1, 1) \approx (0.73205, 1) \quad F_2(-\sqrt{3} - 1, 1) \approx (-2.73205, 1)}$$

- c) Riconducendo l'equazione dell'ellisse alla forma cartesiana canonica completando i quadrati come fatto nel punto a) si ottiene:

$$2x^2 + 4y^2 - x - 16y - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dots \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x - \frac{1}{4})^2}{\left(\frac{\sqrt{209}}{4}\right)^2} + \frac{(y - 2)^2}{\left(\sqrt{\frac{209}{32}}\right)^2} = 1$$

Il centro è dunque  $\boxed{C\left(\frac{1}{4}, 2\right)}$

I semiassi sono  $a = \frac{\sqrt{209}}{4} \approx 3.61421$  (maggiore) e  $b = \sqrt{\frac{209}{32}} \approx 2.55563$  (minore), con eccentricità lineare  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{209}{32}} \approx 2.55563$  ed eccentricità numerica  $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.70711$ , da cui segue che i vertici sono:

$$\boxed{A_1\left(\frac{1 - \sqrt{209}}{4}, 2\right) \approx (-3.36421, 2)}$$

$$\boxed{A_2\left(\frac{1 + \sqrt{209}}{4}, 2\right) \approx (3.86421, 2)}$$

$$\boxed{B_1\left(\frac{1}{4}, \frac{8 - \sqrt{\frac{209}{2}}}{4}\right) \approx (0.25, -0.55563)}$$

$$\boxed{B_2\left(\frac{1}{4}, \frac{16 + \sqrt{418}}{8}\right) \approx (0.25, 4.55563)}$$

mentre i fuochi sono dati da

$$\boxed{F_1\left(\frac{2 - \sqrt{418}}{8}, 2\right) \approx (-2.30563, 2) \quad F_2\left(\frac{2 + \sqrt{418}}{8}, 2\right) \approx (2.80563, 2)}$$

**Esercizio 3**

In tutti questi casi ci si chiede quali sono i punti di coordinate  $(x, y)$  che soddisfano il sistema ...

- a) ...  $\begin{cases} \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1 & \text{(I)} \\ y = 0 & \text{(II)} \end{cases}$  Inserendo la seconda equazione (II) nella prima (I) si trovano le eventuali ascisse dei punti di intersezione

$$\begin{aligned} \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(0+3)^2}{25} = 1 &\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 25x^2 - 250x + 481 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-(-250) \pm \sqrt{(-250)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 481}}{2 \cdot 25} \\ &\Leftrightarrow x_1 = \frac{13}{5} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{37}{5} \end{aligned}$$

Ci sono due punti di intersezione di ascissa  $x_1$  e  $x_2$ . Le ordinate sono pari a  $y = 0$  quindi i punti di intersezione sono

$$\left( \frac{13}{5}, 0 \right) \quad \text{e} \quad \left( \frac{37}{5}, 0 \right)$$

- b) ...  $\begin{cases} \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1 & \text{(I)} \\ x = 0 & \text{(II)} \end{cases}$  Inserendo la seconda equazione (II) nella prima (I) si trovano le eventuali **ordinate** dei punti di intersezione

$$\begin{aligned} \frac{(0-5)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1 &\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y^2 + 6y + 481 = 0 \\ &\Leftrightarrow \Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 481 = -1'918 < 0 \end{aligned}$$

Non ci sono quindi punti di intersezione poiché l'equazione non possiede soluzioni reali.

- c) ...  $\begin{cases} \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1 & \text{(I)} \\ y = -3 & \text{(II)} \end{cases}$  Inserendo la seconda equazione (II) nella prima (I) si trovano le eventuali ascisse dei punti di intersezione

$$\begin{aligned} \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(-3+3)^2}{25} = 1 &\Leftrightarrow (x-5)^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow x_1 = 2 \quad \text{e} \quad x_2 = 8 \end{aligned}$$

Ci sono due punti di intersezione di ascissa  $x_1$  e  $x_2$ . Inserendo queste ascisse nell'equazione della retta si ottengono le ordinate dei punti di intersezione che sono

$$(2, -3) \quad \text{e} \quad (8, -3)$$

- d) ...  $\begin{cases} \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1 & \text{(I)} \\ x = 2 & \text{(II)} \end{cases}$  Inserendo la seconda equazione (II) nella prima (I) si trovano le eventuali **ordinate** dei punti di intersezione

$$\begin{aligned} \frac{(2-5)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1 &\Leftrightarrow (y+3)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow y = -3 \end{aligned}$$

C'è un solo punto di intersezione di ordinata  $y = -3$ . Inserendo questa ordinata nell'equazione della retta si ottiene l'unico punto di intersezione

$$(2, -3)$$

- e) ...  $\begin{cases} \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1 & \text{(I)} \\ y = x & \text{(II)} \end{cases}$  Inserendo la seconda equazione (II) nella prima (I) si trovano le eventuali ascisse dei punti di intersezione

$$\begin{aligned} \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(x+3)^2}{25} = 1 &\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 34x^2 - 196x + 481 = 0 \\ &\Leftrightarrow \Delta = (-196)^2 - 4 \cdot 34 \cdot 481 = -27'000 < 0 \end{aligned}$$

Non ci sono quindi punti di intersezione poiché l'equazione non possiede soluzioni reali.

f) ...  $\begin{cases} \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1 & \text{(I)} \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 & \text{(II)} \end{cases}$  Inserendo la seconda equazione (II) nella prima (I) si trovano le eventuali ascisse dei punti di intersezione

$$\begin{aligned} \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(-\frac{1}{2}x+1+3)^2}{25} &= 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{109}{900}x^2 - \frac{286}{225}x + \frac{769}{225} = 0 \\ \Leftrightarrow x_{1,2} &= \frac{-(-\frac{286}{225}) \pm \sqrt{(-\frac{286}{225})^2 - 4 \cdot \frac{109}{900} \cdot \frac{769}{225}}}{2 \cdot \frac{109}{900}} \\ \Leftrightarrow x_1 &= \frac{272}{109} \quad \text{e} \quad x_2 = 8 \end{aligned}$$

Ci sono due punti di intersezione di ascissa  $x_1$  e  $x_2$ . Inserendo queste ascisse nell'equazione della retta (si poteva inserire anche nell'equazione più complicata dell'ellisse ma il risultato sarebbe uguale) si ottengono le ordinate dei punti di intersezione che sono

$$\left( \frac{272}{109}, -\frac{27}{109} \right) \quad \text{e} \quad (8, -3)$$

#### Esercizio 4

Completare il quadrato e trovare eq cartesiana dell'ellisse. le soluzioni reali dell'equazione sono i punti che giacciono sull'ellisse. Si nota che la coordinata  $y$  appartiene all'intervallo  $[2; 4]$ , quindi tra le soluzioni intere cercate la  $y$  può assumere unicamente i valori 2 oppure 3 oppure 4 cioè  $y \in \{2; 3; 4\}$ . Per questi valori geometricamente si trovano i vertici dell'ellisse, le cui coordinate rappresentano le uniche 4 soluzioni intere di questa equazione. Le soluzioni sono:

$$(x, y) \in \{(-1, 3); (4, 2); (4, 4); (9, 3)\}$$

#### Esercizio 5

Conoscendo il centro  $C(-1, -1)$  dell'ellisse la sua equazione cartesiana sarà data da

$$\frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$$

Restano quindi da scoprire i valori attualmente incogniti dei semiassi  $a$  e  $b$ . Per fare ciò fortunatamente abbiamo due informazioni da sfruttare (le due rette che sappiamo essere tangenti). Per poter utilizzare il **teorema 2** (*Tangenti all'ellisse*) dimostrato in classe e che si applica unicamente all'ellisse di centro  $(0, 0)$  proviamo ad utilizzare delle nuove coordinate  $x' = x + 1$  e  $y' = y + 1$ . Sostituendo nell'equazione precedente, nelle nuove coordinate  $x'$  e  $y'$  l'ellisse avrà equazione

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

Nota che rispetto alle coordinate  $(x, y)$  il centro è  $(-1, -1)$ , mentre rispetto alle coordinate  $(x', y')$  il centro si trova in  $(0, 0)$  e perciò si può applicare il teorema. Tuttavia non è possibile utilizzare le coordinate  $(x', y')$  unicamente per l'ellisse, bisogna esprimere anche le rette  $r_1$  e  $r_2$  rispetto a questo nuovo sistema di riferimento  $(x', y')$

$$r_1 : 3x + 4y - 18 = 0 \Leftrightarrow 3(x' - 1) + 4(y' - 1) - 18 = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{3}{4}x' + \frac{25}{4}$$

$$r_2 : 4x + 3y - 18 = 0 \Leftrightarrow 4(x' - 1) + 3(y' - 1) - 18 = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{4}{3}x' + \frac{25}{3}$$

A questo punto è possibile utilizzare la parte a) del teorema nelle coordinate  $(x', y')$  che dice:

**Teorema 2 a)** Una retta  $y' = m \cdot x' + q$  è tangente all'ellisse di equazione  $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$  se e soltanto se

$$a^2 m^2 + b^2 = q^2$$

Applicando il teorema alle due rette  $r_1$  e  $r_2$  in coordinate  $(x', y')$  si ottiene il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} a^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + b^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2 \\ a^2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + b^2 = \left(\frac{25}{3}\right)^2 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema rispetto alle incognite  $a^2$  e  $b^2$  si ottiene che  $a^2 = b^2 = 25$  quindi l'equazione dell'ellisse, o per meglio dire circonferenza, cercata è nelle coordinate  $(x, y)$

$$\frac{(x+1)^2}{5^2} + \frac{(y+1)^2}{5^2} = 1$$

Trattandosi di una circonferenza l'eccentricità numerica è  $\varepsilon = 0$ .