

Serie 3: Soluzioni

Esercizio 1

- a) Dalla forma data si ricavano immediatamente il centro $C(-3, 4)$ ed i semiassi maggiore $a = \sqrt{10}$ e minore $b = 2$. Da cui segue che la forma parametrica dell'ellisse dato è

$$e_1 : \begin{cases} x = -3 + \sqrt{10} \cos(t) \\ y = 4 + 2 \sin(t) \end{cases} \quad \text{con } t \in [0; 2\pi[$$

- b) Completando il quadrato si riconduce alla forma canonica

$$x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{25} + \frac{y^2}{25} = 1$$

da cui poi si identificano centro $C(1, 0)$ ed i semiassi maggiore $a = 5$ e minore $b = 5$. Da cui poi segue la forma parametrica di questa circonferenza (piché il raggio $r = a = b = 5$)

$$e_2 : \begin{cases} x = 1 + 5 \cos(t) \\ y = 5 \sin(t) \end{cases} \quad \text{con } t \in [0; 2\pi[$$

- c) Completando il quadrato si riconduce alla forma canonica

$$3x^2 + y^2 - 2y = 15 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{\frac{16}{3}} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

da cui poi si identificano centro $C(0, 1)$ ed i semiassi minore $a = \frac{4}{\sqrt{3}}$ e maggiore $b = 4$. Da cui poi segue la forma parametrica

$$e_2 : \begin{cases} x = \frac{4}{\sqrt{3}} \cos(t) \\ y = 1 + 4 \sin(t) \end{cases} \quad \text{con } t \in [0; 2\pi[$$

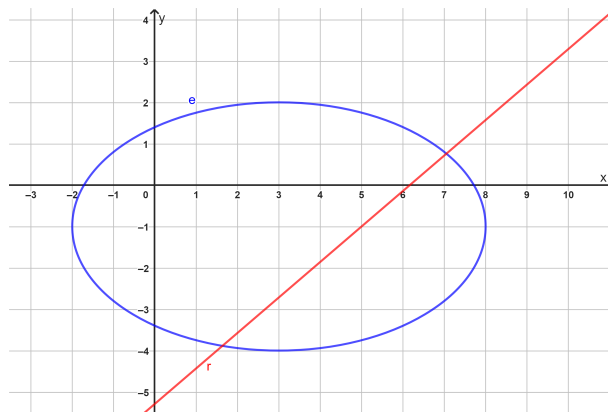
Esercizio 2

- a) e è la forma parametrica di un'ellisse avente centro in $C(3, -1)$ con semiasse maggiore $a = 5$ e semiasse minore $b = 3$. r è la forma parametrica di una retta nel piano cartesiano. La forma esplicita di una retta con pendenza m e ordinata all'origine q è data da $y = mx + q$. Trovando due punti appartenenti ad r ad esempio ponendo $t = 0$ si ottiene $(5, -1)$ e ponendo $t = 1$ si ottiene $(12, 5)$. Utilizzando le coordinate dei due punti si trova poi la forma cartesiana esplicita della retta passante per essi, ovvero

$$r : y = \frac{6}{7}x - \frac{37}{7}$$

mentre la forma cartesiana dell'ellisse è data da

$$e : \frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$



- b) Si cercano i punti (x, y) che soddisfano il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1 \\ y = \frac{6}{7}x - \frac{37}{7} \end{cases}$$

Procedendo poi come nell'**esercizio 3f) della serie 2**, si sostituisce y nella prima equazione ricavando così un'equazione di secondo grado le cui soluzioni sono le ascisse degli eventuali punti di intersezione tra la retta e l'ellisse. In questo caso ci sono due punti di intersezione che sono

$$\begin{aligned} \left(\frac{647 - 35\sqrt{133}}{149}, \frac{-233 - 30\sqrt{133}}{149} \right) &\approx (1.6333, -3.8858) \\ \left(\frac{647 + 35\sqrt{133}}{149}, \frac{-233 + 30\sqrt{133}}{149} \right) &\approx (7.0513, 0.7582) \end{aligned}$$

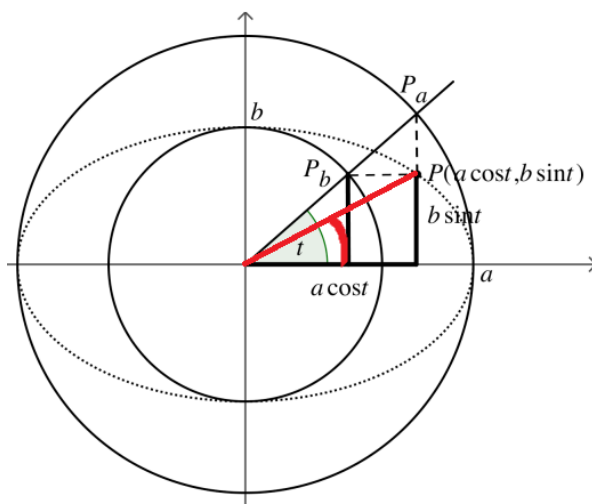
- c) Dalla forma cartesiana dell'ellisse $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ si deduce che il centro si trova in $(3, -1)$ e che il fuoco destro (una volta calcolata l'eccentricità lineare $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$) si trova in $(7, -1)$. Le coordinate del punto $P(x_0, y_0)$ si ottengono inserendo $t = \frac{\pi}{6}$ nella forma parametrica

$$\begin{cases} x = 3 + 5 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{6+5\sqrt{3}}{2} \\ y = -1 + 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ragionando con un opportuno triangolo rettangolo $\widehat{HCP}$ dove H è la proiezione ortogonale di P sulla retta passante per i fuochi e le coordinate dei punti noti, si ottiene che

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{6+5\sqrt{3}}{2} - 3}\right) \approx 0.3335^{rad} \quad (\text{oppure } \approx 19.1066^\circ)$$

- d) Da quanto calcolato risulta che l'angolo al centro $\approx 19.1066^\circ \neq 30^\circ = \frac{\pi}{6}^{rad}$ questo perché il parametro t nella costruzione della parametrizzazione dell'ellisse non è l'angolo che è stato calcolato in questa occasione. Si faccia riferimento alla costruzione parametrica dell'ellisse (vedi immagine seguente): il parametro t è l'angolo in verde, mentre l'angolo α appena calcolato è l'angolo marcato in rosso.



Esercizio 3

Elevando al quadrato entrambe le equazioni si ottiene:

$$\begin{cases} x = \frac{2 \cos(t)}{\sqrt{1 + \sin^2(t)}} \\ y = \frac{2 \sin(t)}{\sqrt{1 + \sin^2(t)}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{4 \cos^2(t)}{1 + \sin^2(t)} \\ y^2 = \frac{4 \sin^2(t)}{1 + \sin^2(t)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \sin^2(t))x^2 = 4 \cos^2(t) \\ (1 + \sin^2(t))y^2 = 4 \sin^2(t) \end{cases}$$

per ottenere delle equazioni che contengono unicamente la funzione $\sin(t)$ si utilizza l'identità trigonometrica $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$ sostituendo nella I^a equazione ottenendo così:

$$\begin{cases} (1 + \sin^2(t))x^2 = 4 \cos^2(t) \\ (1 + \sin^2(t))y^2 = 4 \sin^2(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \sin^2(t))x^2 = 4(1 - \sin^2(t)) \\ (1 + \sin^2(t))y^2 = 4 \sin^2(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2(t) = \frac{4 - x^2}{4 + x^2} \\ \sin^2(t) = \frac{y^2}{4 - y^2} \end{cases}$$

Dove l'ultimo sistema è stato ottenuto risolvendo entrambe le equazioni rispetto a $\sin^2(t)$. Essendo entrambe le equazioni uguali a $\sin^2(t)$ e confrontandole tra di loro si ottiene.

$$\begin{aligned} \frac{4 - x^2}{4 + x^2} &= \frac{y^2}{4 - y^2} &\Leftrightarrow (4 - x^2)(4 - y^2) &= (4 + x^2)y^2 \\ &&\Leftrightarrow 16 - 4y^2 - 4x^2 + x^2y^2 &= 4y^2 + x^2y^2 \\ &&\Leftrightarrow 4x^2 + 8y^2 &= 16 \\ &&\Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} &= 1 \end{aligned}$$

da cui segue che l'eccentricità lineare è $c = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$ (in questo caso il semiasse minore è pari all'eccentricità lineare ma è un caso fortuito) che ci permette infine di ottenere l'eccentricità numerica $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071$.

Esercizio 4 Si noti che è inizialmente conveniente riscrivere l'equazione cartesiana (con parametro k) dell'ellisse sia raccogliendo i termini nella forma cartesiana implicita, sia esprimendola nella sua forma cartesiana canonica, cioè

$$2kx^2 + 4ky^2 + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (2k + 1)x^2 + 4ky^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{4k}}\right)^2} = 1$$

a) Inserendo le coordinate del punto $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ nell'equazione cartesiana data si ottiene

$$(2k + 1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4k(-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{6}$$

b) Si ricorda che un'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ha il semiasse maggiore parallelo all'asse y se vale che $a < b$. Dall'equazione cartesiana canonica ricavata si deducono le seguenti condizioni affinché l'equazione descriva un'ellisse

$$\begin{cases} 4k > 0 & \text{radice quadrata al denominatore} \\ 2k + 1 > 0 & \text{radice quadrata al denominatore} \\ \frac{1}{\sqrt{4k}} > \frac{1}{\sqrt{2k+1}} & \text{semiasse maggiore parallelo all'asse } y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k > -\frac{1}{2} \\ 2k + 1 > 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k > -\frac{1}{2} \\ k < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Da cui segue che $k \in]0; \frac{1}{2}[$.

- c) Analogamente al discorso fatto in b) per un'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ i fuochi sono sull'asse delle x solo se il semiasse maggiore è sull'asse x ; in questo caso deve valere che $a > b$. Da ciò segue che l'eccentricità lineare è data da $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ e che quindi deve valere che

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{4k}}\right)^2}}{\frac{1}{\sqrt{2k+1}}} = \frac{\sqrt{\frac{4k - (2k+1)}{(2k+1)4k}}}{\frac{1}{\sqrt{2k+1}}} = \frac{\sqrt{\frac{2k-1}{(2k+1)4k}}}{\frac{1}{\sqrt{2k+1}}} = \sqrt{\frac{2k-1}{4k}}$$

Con il dato del problema poi si ottiene

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2k-1}{4k}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{2k-1}{4k}}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{2k-1}{4k} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow k = \frac{4}{7}$$

Attenzione: risolvendo un'equazione irrazionale bisognerà poi verificare se le eventuali soluzioni così ottenute dalla quadratura di entrambi i membri dell'equazione sono effettivamente soluzioni dell'equazione originale $\sqrt{\frac{2k-1}{4k}} = \frac{1}{4}$. In questo problema la soluzione trovata risolve l'equazione originale.

Esercizio 5 L'equazione dell'ellisse sarà del tipo

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2(x-2)^2 + a^2(y-1)^2 = a^2b^2$$

Sapendo che il punto $A(-1, -1)$ appartiene all'ellisse, e quindi soddisfa la sua equazione, è possibile esprimere a^2 in funzione di b^2 , infatti

$$b^2(-1-2)^2 + a^2(-1-1)^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{9b^2}{b^2-4}$$

quindi l'equazione dell'ellisse cercata sarà del tipo

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{9b^2}{b^2-4}} + \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$$

Essendo l'ellisse non centrata all'origine degli assi e utilizzando il seguente cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' + 1 \end{cases}$$

è possibile riscrivere l'equazione della tangente e dell'ellisse che rispetto a queste nuove coordinate (x', y') è centrata all'origine.

$$2x - y - 11 = 0 \Leftrightarrow 2(x' + 2) - (y' + 1) - 11 = 0 \Leftrightarrow y' = 2x' - 8$$

Essendo l'ellisse in queste nuove coordinate centrata all'origine è possibile utilizzare il teorema per ricavare la b , infatti

$$a^2m^2 + b^2 = q^2 \Leftrightarrow \frac{9b^2}{b^2-4} \cdot 2^2 + b^2 = (-8)^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow b = \pm 4$$

Essendo b la misura di un semiasse deve essere un valore positivo, si scarta perciò la soluzione $b = -4$ ottenendo così per $b = 4$ l'equazione dell'ellisse cercata

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{9b^2}{b^2-4}} + \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{\frac{9 \cdot 16}{16-4}} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{12} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

Esercizio 5 Si considera il seguente cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} x' = x - x_c \\ y' = y - y_c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + x_c \\ y = y' + y_c \end{cases}$$

Secondo queste nuove coordinate (x', y') il punto P verrà espresso

$$P(x_p, y_p) = (x'_p, y'_p) = (x_p - x_c, y_p - y_c)$$

Mentre l'ellisse, avrà centro nell'origine degli assi di queste nuove coordinate (x', y') , infatti

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

Utilizzando quindi la formula di sdoppiamento già vista per ellissi centrate all'origine in queste nuove coordinate, otteniamo l'equazione della retta t tangente all'ellisse e passante per P in queste nuove coordinate (x', y')

$$t : \frac{x'_p x'}{a^2} + \frac{y'_p y'}{b^2} = 1$$

Ritornando infine alle coordinate iniziali (sostituendo x'_p , y'_p , x' e y' opportunamente con quanto già menzionato) si ottiene l'equazione della retta t cercata

$$t : \frac{(x_p - x_c)(x - x_c)}{a^2} + \frac{(y_p - y_c)(y - y_c)}{b^2} = 1$$

■