

Serie 5: Soluzioni

Esercizio 1 Ponendo $\theta = \frac{\pi}{2}$ nell'equazione polare focale si ottiene il parametro focale (o semilato retto)

$$\ell = r \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \varepsilon \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \varepsilon \cdot 0} = \frac{b^2}{a}$$

Esercizio 2 Poniamo il centro del sistema di coordinate cartesiano (x, y) nel fuoco destro di un'ellisse avente semiasse maggiore sull'asse delle ascisse. Sia θ l'angolo con centro nel fuoco destro dell'ellisse misurato in senso antiorario tra l'asse delle ascisse e il punto generico P sull'ellisse. Procediamo definendo un nuovo sistema di coordinate (x', y') con origine nel centro dell'ellisse; vale quindi che:

$$\begin{cases} x = x' - c \\ y = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + c \\ y' = y \end{cases}$$

Rispetto alle nuove coordinate (x', y') l'ellisse ha equazione

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b^2(x')^2 + a^2(y')^2 = a^2b^2$$

Trasformando nelle coordinate cartesiane (x, y) si ottiene

$$b^2(x')^2 + a^2(y')^2 = a^2b^2 \quad \Leftrightarrow \quad b^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \Leftrightarrow \quad b^2x^2 - 2b^2cx + b^2c^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

trasformando poi in coordinate polari $\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$ si ottiene

$$\begin{aligned} b^2x^2 - 2b^2cx + b^2c^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 &\Leftrightarrow & b^2r^2 \cos^2(\theta) - 2b^2cr \cos(\theta) + b^2c^2 + a^2r^2 \sin^2(\theta) = a^2b^2 \\ &&\Leftrightarrow & b^2r^2 \cos^2(\theta) - 2b^2cr \cos(\theta) + b^2c^2 + a^2r^2(1 - \cos^2(\theta)) = a^2b^2 \\ &&\Leftrightarrow & b^2r^2 \cos^2(\theta) - 2b^2cr \cos(\theta) + b^2c^2 + a^2r^2 - a^2r^2 \cos^2(\theta) = a^2b^2 \\ &&\Leftrightarrow & r^2 \cos^2(\theta) \underbrace{(b^2 - a^2)}_{=-c^2} - 2b^2cr \cos(\theta) + a^2r^2 = b^2 \underbrace{(a^2 - c^2)}_{=b^2} \\ &&\Leftrightarrow & -c^2r^2 \cos^2(\theta) - 2b^2cr \cos(\theta) + a^2r^2 = b^4 \\ &&\Leftrightarrow & a^2r^2 = b^4 + 2b^2cr \cos(\theta) + c^2r^2 \cos^2(\theta) \\ &&\Leftrightarrow & (ar)^2 = (b^2 + cr \cos(\theta))^2 \end{aligned}$$

essendo $a, r > 0$ allora segue che (la soluzione a segni opposti viene scartata geometricamente)

$$\begin{aligned} (ar)^2 &= (b^2 + cr \cos(\theta))^2 &\Leftrightarrow & ar = b^2 + cr \cos(\theta) \\ &&\Leftrightarrow & r(a - c \cos(\theta)) = b^2 \\ &&\Leftrightarrow & r = \frac{b^2}{a - c \cos(\theta)} \\ &&\Leftrightarrow & r = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \underbrace{\frac{c}{a} \cos(\theta)}_{=\varepsilon}} \end{aligned}$$

da cui segue il risultato $r(\theta) = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \varepsilon \cos(\theta)} = \frac{\ell}{1 - \varepsilon \cos(\theta)}$

Esercizio 3 Confrontando l'equazione data con l'equazione polare focale (con centro nel fuoco sinistro) si ricava immediatamente il sistema di equazioni seguente.

$$\begin{cases} \ell = 5 \\ \varepsilon = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b^2}{a} = 5 \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \end{cases} \begin{array}{l} \text{prima eq.} \\ \text{seconda eq.} \end{array}$$

Elevando al quadrato la seconda equazione, e dato che per l'eccentricità lineare vale che $c^2 = a^2 - b^2$, si ottiene poi

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow c^2 = \frac{1}{4}a^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = \frac{1}{4}a^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}a^2 = b^2$$

Inserendo poi nella prima equazione del sistema iniziale, si ottiene

$$\frac{b^2}{a} = 5 \Leftrightarrow b^2 = 5a \Leftrightarrow \frac{3}{4}a^2 = 5a \Leftrightarrow a \cdot \left(\frac{3}{4}a - 5\right) = 0$$

Da cui segue che $a = 0$ (soluzione da scartare poiché un'ellisse con tali valori iniziali esiste) oppure $a = \frac{20}{3}$.

Sostituendo il valore di a appena trovato per ricavare b si ottiene

$$b = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \sqrt{\frac{100}{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

Dato che l'ellisse descritta dall'equazione polare non ha centro all'origine degli assi (x, y) , è necessario conoscere l'eccentricità lineare.

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^2 - \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{10}{3}$$

Quindi rispetto al sistema di coordinate (x, y) dato l'ellisse ha centro in $(\frac{10}{3}, 0)$. Con i dati a disposizione è infine possibile stabilire l'equazione canonica dell'ellisse data rispetto al sistema di riferimento (x, y) centrato nel fuoco sinistro dell'ellisse

$$\frac{\left(x - \frac{10}{3}\right)^2}{\left(\frac{20}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 1$$