

Serie 7: Soluzioni

Esercizio 1

- a) Si considerano le seguenti relazioni tra le coordinate cartesiane e le coordinate polari nei due sistemi di riferimento. Per definizione delle coordinate polari si ottiene quindi

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{x} = \tilde{r} \cos(\tilde{\theta}) \\ \tilde{y} = \tilde{r} \sin(\tilde{\theta}) \end{cases}$$

Si noti in seguito che per costruzione deve valere che $r = \tilde{r}$ e $\theta = \tilde{\theta} + \alpha$ da cui poi con le formule di addizione del sin e del cos si ottiene che le coordinate (x, y) in funzione di $(\tilde{x}, \tilde{y})$ sono date da

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) = \tilde{r} \cos(\tilde{\theta} + \alpha) = \tilde{r} \cdot (\cos(\tilde{\theta}) \cos(\alpha) - \sin(\tilde{\theta}) \sin(\alpha)) = \underbrace{\tilde{r} \cos(\tilde{\theta})}_{\tilde{x}} \cos(\alpha) - \underbrace{\tilde{r} \sin(\tilde{\theta})}_{\tilde{y}} \sin(\alpha) \\ y = r \sin(\theta) = \tilde{r} \sin(\tilde{\theta} + \alpha) = \tilde{r} \cdot (\sin(\tilde{\theta}) \cos(\alpha) + \cos(\tilde{\theta}) \sin(\alpha)) = \underbrace{\tilde{r} \sin(\tilde{\theta})}_{\tilde{y}} \cos(\alpha) + \underbrace{\tilde{r} \cos(\tilde{\theta})}_{\tilde{x}} \sin(\alpha) \end{cases}$$

da cui segue che la relazione cercata è

$$\begin{cases} x = \tilde{x} \cos(\alpha) - \tilde{y} \sin(\alpha) \\ y = \tilde{x} \sin(\alpha) + \tilde{y} \cos(\alpha) \end{cases} \quad (1)$$

- b) Si noti che l'equazione della curva cercata è esprimibile piuttosto facilmente nelle coordinate $(\tilde{x}, \tilde{y})$. In queste coordinate infatti l'iperbole ruotata ha equazione

$$\mathcal{I} : \frac{\tilde{x}^2}{49} - \frac{\tilde{y}^2}{16} = 1$$

Ciò significa che per ottenere l'equazione della curva nelle coordinate (x, y) serve ora esprimere le coordinate $(\tilde{x}, \tilde{y})$ in funzione delle coordinate (x, y) , cioè "il contrario" di quanto fatto nel punto precedente. Sempre con la stessa tecnica si ottiene

$$\begin{cases} \tilde{x} = \tilde{r} \cos(\tilde{\theta}) = r \cos(\theta - \alpha) = r \cdot (\cos(\theta) \cos(\alpha) + \sin(\theta) \sin(\alpha)) = \underbrace{r \cos(\theta)}_x \cos(\alpha) + \underbrace{r \sin(\theta)}_y \sin(\alpha) \\ \tilde{y} = \tilde{r} \sin(\tilde{\theta}) = r \sin(\theta - \alpha) = r \cdot (\sin(\theta) \cos(\alpha) - \cos(\theta) \sin(\alpha)) = \underbrace{r \sin(\theta)}_y \cos(\alpha) - \underbrace{r \cos(\theta)}_x \sin(\alpha) \end{cases}$$

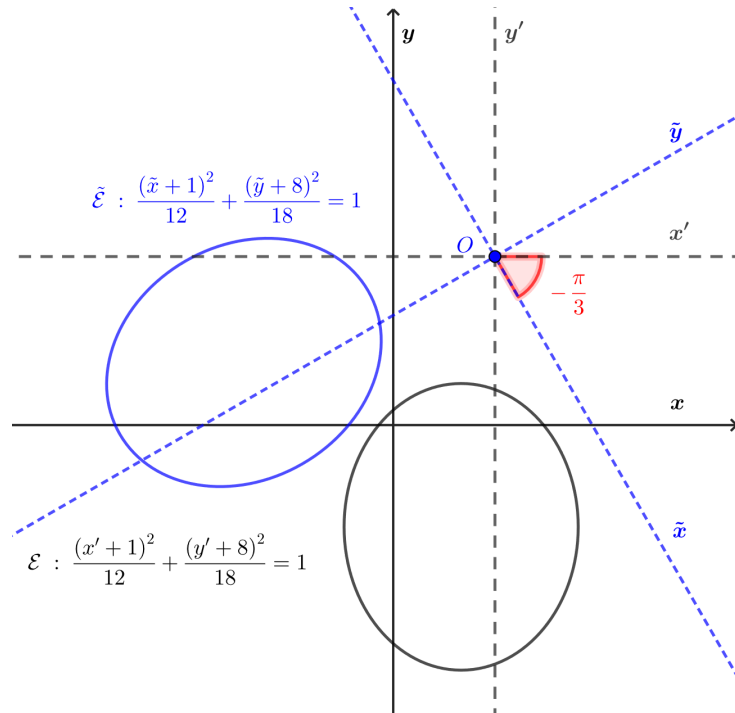
da cui segue che la relazione cercata è

$$\begin{cases} \tilde{x} = x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) \\ \tilde{y} = -x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha) \end{cases} \quad (2)$$

A questo punto si ricava l'equazione cartesiana cercata sostituendo $(\tilde{x}, \tilde{y})$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{x}^2}{49} - \frac{\tilde{y}^2}{16} = 1 & \Leftrightarrow 16\tilde{x}^2 - 49\tilde{y}^2 = 784 \\ & \Leftrightarrow 16 \left(x \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + y \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right)^2 - 49 \left(-x \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + y \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right)^2 = 784 \\ & \Leftrightarrow 16 \left(-x \frac{\sqrt{3}}{2} + y \frac{1}{2} \right)^2 - 49 \left(-x \frac{1}{2} - y \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 784 \\ & \Leftrightarrow 16 \left(\frac{3x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{xy\sqrt{3}}{2} \right) - 49 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{3y^2}{4} + \frac{xy\sqrt{3}}{2} \right) = 784 \\ & \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 - \frac{131}{4}y^2 - \frac{130\sqrt{3}}{4}xy = 784 \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 + \frac{131}{4}y^2 + \frac{130\sqrt{3}}{4}xy + 784 = 0 \end{aligned}$$

- c) Il problema consiste nel trovare l'equazione cartesiana dell'ellisse in blu $\tilde{\mathcal{E}}$ rispetto alle coordinate (x, y) . L'idea della risoluzione è quella di suddividere il problema in tre parti: una traslazione, seguita da una rotazione ed infine ancora una traslazione. A tale scopo introduciamo due nuovi sistemi di coordinate (x', y') e $(\tilde{x}, \tilde{y})$ come da immagine sottostante. In blu è rappresentata l'ellisse $\tilde{\mathcal{E}}$ ottenuta ruotando l'ellisse $\mathcal{E}$ di $\frac{\pi}{3}$ in senso antiorario rispetto al punto $O(3, 5)$.



1^a parte, traslazione: per prima cosa proviamo a traslare il problema per avere il centro della rotazione, il punto $O(3, 5)$, al centro del nuovo sistema di coordinate (x', y') . A tale scopo notiamo che

$$\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y - 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' + 5 \end{cases} \quad (3)$$

Sostituendo con questa relazione si ottiene che nelle coordinate (x', y') il punto $O(3, 5)$ avrà coordinate $(0, 0)'$ e sempre in queste nuove coordinate l'equazione dell'ellisse data $\mathcal{E}$ diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : \frac{(x-2)^2}{12} + \frac{(y+3)^2}{18} = 1 &\Leftrightarrow \frac{(x'+3-2)^2}{12} + \frac{(y'+5+3)^2}{18} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x'+1)^2}{12} + \frac{(y'+8)^2}{18} = 1 \end{aligned}$$

si ottiene quindi l'equazione

$$\mathcal{E} : \frac{(x'+1)^2}{12} + \frac{(y'+8)^2}{18} = 1$$

2^a parte, rotazione: ora che siamo in possesso dell'equazione di $\mathcal{E}$ nelle coordinate (x', y') possiamo dedicarci alla rotazione. Anzitutto, come in precedenza, notiamo che l'equazione dell'ellisse blu $\tilde{\mathcal{E}}$ nelle coordinate $(\tilde{x}, \tilde{y})$ è data da

$$\tilde{\mathcal{E}} : \frac{(\tilde{x}+1)^2}{12} + \frac{(\tilde{y}+8)^2}{18} = 1$$

Ora, considerando quanto fatto in precedenza, possiamo esprimere le coordinate $(\tilde{x}, \tilde{y})$ in funzione delle coordinate (x', y') , infatti

$$\begin{cases} \tilde{x} = x' \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + y' \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' \\ \tilde{y} = -x' \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + y' \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' \end{cases} \quad (4)$$

per semplificare i calcoli, si manipola l'equazione dell'ellisse cercata $\tilde{\mathcal{E}}$ e si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{(\tilde{x}+1)^2}{12} + \frac{(\tilde{y}+8)^2}{18} &= 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3(\tilde{x}+1)^2 + 2(\tilde{y}+8)^2 = 36 \\ &\Leftrightarrow \quad 3(\tilde{x}^2 + 2\tilde{x} + 1) + 2(\tilde{y}^2 + 16\tilde{y} + 64) = 36 \\ &\Leftrightarrow \quad 3\tilde{x}^2 + 6\tilde{x} + 2\tilde{y}^2 + 32\tilde{y} + 95 = 0\end{aligned}$$

Sostituendo poi con (4) si trova l'equazione cartesiana dell'ellisse cercata in coordinate (x', y')

$$\begin{aligned}3\tilde{x}^2 + 6\tilde{x} + 2\tilde{y}^2 + 32\tilde{y} + 95 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 3\left[\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right]^2 + 6\left[\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right] + 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right]^2 + 32\left[\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right] + 95 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 3\left[\frac{(x')^2}{4} - \frac{\sqrt{3}x'y'}{2} + \frac{3(y')^2}{4}\right] + 6\left[\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right] + 2\left[\frac{3(x')^2}{4} + \frac{\sqrt{3}x'y'}{2} + \frac{(y')^2}{4}\right] \\ &+ 32\left[\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right] + 95 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad 3\left[(x')^2 - 2\sqrt{3}x'y' + 3(y')^2\right] + 6\left[2x' - 2\sqrt{3}y'\right] + 2\left[3(x')^2 + 2\sqrt{3}x'y' + (y')^2\right] \\ &+ 32\left[2\sqrt{3}x' + 2y'\right] + 380 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad 3(x')^2 - 6\sqrt{3}x'y' + 9(y')^2 + 12x' - 12\sqrt{3}y' + 6(x')^2 + 4\sqrt{3}x'y' + 2(y')^2 + 64\sqrt{3}x' + 64y' + 380 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 9(x')^2 + 11(y')^2 - 2\sqrt{3}x'y' + 12x' + 64\sqrt{3}x' + 64y' - 12\sqrt{3}y' + 380 &= 0\end{aligned}$$

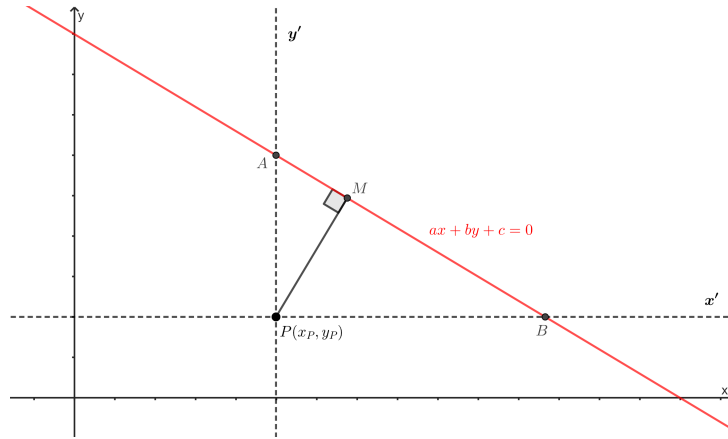
3^a parte, traslazione: infine ancora con (3) si trova l'equazione cartesiana dell'ellisse cercata in coordinate (x, y)

$$\begin{aligned}9(x')^2 + 11(y')^2 - 2\sqrt{3}x'y' + 12x' + 64\sqrt{3}x' + 64y' - 12\sqrt{3}y' + 380 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 9(x-3)^2 + 11(y-5)^2 - 2\sqrt{3}(x-3)(y-5) + 12(x-3) \\ &+ 64\sqrt{3}(x-3) + 64(y-5) - 12\sqrt{3}(y-5) + 380 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad 9(x^2 - 6x + 9) + 11(y^2 - 10y + 25) - 2\sqrt{3}(xy - 5x - 3y + 15) + 12x - 36 \\ &+ 64\sqrt{3}x - 192\sqrt{3} + 64y - 320 - 12\sqrt{3}y + 60\sqrt{3} + 380 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad 9x^2 - 54x + 81 + 11y^2 - 110y + 275 - 2\sqrt{3}xy + 10\sqrt{3}x + 6\sqrt{3}y - 30\sqrt{3} + 12x - 36 \\ &+ 64\sqrt{3}x - 192\sqrt{3} + 64y - 320 - 12\sqrt{3}y + 60\sqrt{3} + 380 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad 9x^2 + 11y^2 - 2\sqrt{3}xy - 42x + 74\sqrt{3}x - 46y - 6\sqrt{3}y + 380 - 162\sqrt{3} &= 0\end{aligned}$$

Si conclude quindi che

$$\tilde{\mathcal{E}} : 9x^2 + 11y^2 - 2\sqrt{3}xy - 42x + 74\sqrt{3}x - 46y - 6\sqrt{3}y + 380 - 162\sqrt{3} = 0$$

Esercizio 2 Consideriamo un punto generico $P(x_P, y_P)$ e una retta generica $r : ax + by + c = 0$.



Procederemo risolvendo il problema in un nuovo sistema di riferimento (x', y') con origine nel punto P . Si noti che una traslazione non altera il valore della distanza punto retta. Rispetto alle nuove coordinate (x', y') il punto P avrà dunque coordinate $(0, 0)'$ mentre la retta r avrà equazione

$$\begin{aligned} r : ax + by + c = 0 &\Leftrightarrow a(x' + x_P) + b(y' + y_P) + c = 0 \Leftrightarrow ax' + by' + \underbrace{(ax_P + by_P + c)}_{\text{costante } \tilde{c}} = 0 \\ &\Leftrightarrow ax' + by' + \tilde{c} = 0 \end{aligned}$$

Si noti che i coefficienti a e b non cambiano nei due sistemi di coordinate, mentre cambia il valore della costante che qui per comodità è stata definita come $\tilde{c} := ax_P + by_P + c$. A questo punto si ricavano immediatamente le coordinate (x', y') dei punti di intersezione tra la retta r con gli assi A e B , che sono

$$A \left(-\frac{\tilde{c}}{a}, 0 \right)' \quad B \left(0, -\frac{\tilde{c}}{b} \right)'$$

Si ricavano in seguito le distanze positive, e perciò messe in valore assoluto, seguenti

$$|PA| = \left| \frac{-\tilde{c}}{a} \right| = \left| \frac{\tilde{c}}{a} \right| \quad \text{e} \quad |PB| = \left| \frac{-\tilde{c}}{b} \right| = \left| \frac{\tilde{c}}{b} \right|$$

e con Pitagora

$$|AB| = \sqrt{|PA|^2 + |PB|^2} = \sqrt{\left| \frac{\tilde{c}}{a} \right|^2 + \left| \frac{\tilde{c}}{b} \right|^2} = \sqrt{\frac{b^2 \tilde{c}^2 + a^2 \tilde{c}^2}{a^2 b^2}} = \sqrt{\frac{\tilde{c}^2 (b^2 + a^2)}{a^2 b^2}} = \frac{|\tilde{c}| \sqrt{a^2 + b^2}}{|ab|}$$

Si inserisce in seguito il punto M a partire dal quale viene misurata la distanza punto retta $d(P, r) = |PM|$, ed essendo i triangoli PMB e APB simili si può immediatamente ricavare con il rapporto di similitudine

$$\frac{|PM|}{|PA|} = \frac{|PB|}{|AB|} \Leftrightarrow |PM| = \frac{|PB|}{|AB|} \cdot |PA|$$

da cui si ricava che

$$d(P, r) = |PM| = \frac{|PB|}{|AB|} \cdot |PA| = \frac{\left| \frac{\tilde{c}}{b} \right|}{\frac{|\tilde{c}| \sqrt{a^2 + b^2}}{|ab|}} \cdot \left| \frac{\tilde{c}}{a} \right| = \frac{|\tilde{c}|}{|b|} \cdot \frac{|a| \cdot |b|}{|\tilde{c}| \sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{|\tilde{c}|}{|a|} = \frac{|\tilde{c}|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

la formula della distanza tra il punto P e la retta $r : ax' + by' + \tilde{c} = 0$ nelle coordinate (x', y') è quindi data da

$$d(P, r) = \frac{|\tilde{c}|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \text{dove } \tilde{c} \text{ è il termine costante nell'equazione della retta } r$$

Sostituendo $\tilde{c} := ax_P + by_P + c$ nella formula appena trovata si ricava infine la formula cercata della distanza tra il punto P e la retta $r : ax' + by' + \tilde{c} = 0$ data da

$$d(P, r) = \frac{|\tilde{c}|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Esercizio 3

- a) Inserendo le coordinate $P\left(\frac{20}{3}, 4\right)$ nell'equazione dell'iperbole $\mathcal{I}$ si ottiene

$$\frac{\left(\frac{20}{3}\right)^2}{16} - \frac{4^2}{9} = \frac{\frac{400}{9}}{16} - \frac{16}{9} = \frac{400}{144} - \frac{256}{144} = \frac{144}{144} = 1$$

Dato che le coordinate di P soddisfano l'equazione dell'iperbole, il punto si trova sull'iperbole.

- b) Essendo P un punto dell'iperbole, si può utilizzare la formula di sdoppiamento

$$\frac{\frac{20}{3} \cdot x}{16} - \frac{4y}{9} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{15}{16}x - \frac{36}{16} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{15}{16}x - \frac{9}{4}$$

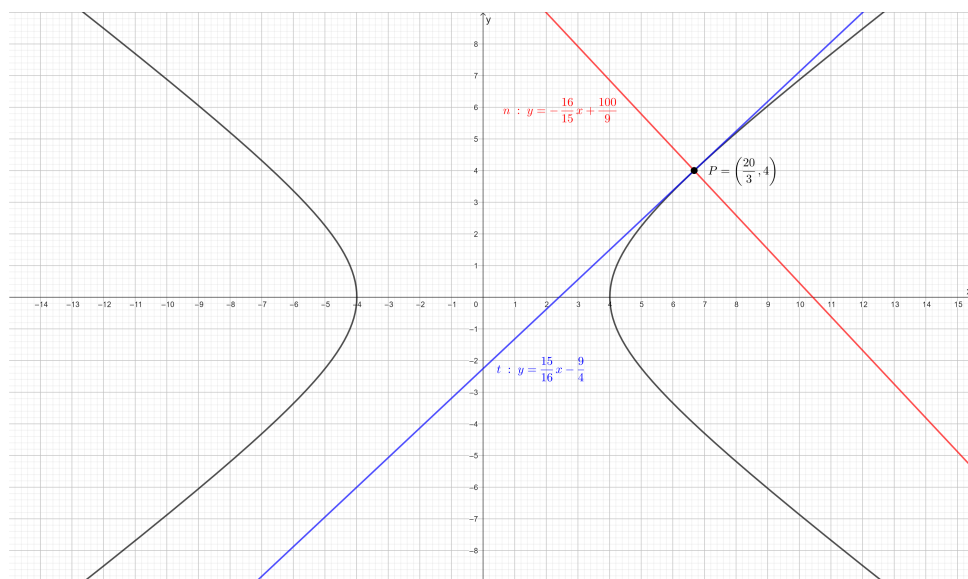
la retta t tangente all'iperbole $\mathcal{I}$ nel punto P è $t : y = \frac{15}{16}x - \frac{9}{4}$

- c) Sia $n : y = mx + q$ la retta normale cercata, allora deve valere che

$$\begin{cases} m \cdot \frac{15}{16} = -1 & \text{la retta } n \text{ deve essere perpendicolare alla retta } t \\ 4 = m \cdot \frac{20}{3} + q & \text{il punto } P \text{ deve appartenere alla retta normale} \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava che $m = -\frac{16}{15}$ e inserendo nella seconda si trova che $q = \frac{100}{9}$ quindi la retta normale cercata è

$$n : y = -\frac{16}{15}x + \frac{100}{9}$$



- d) Si determinano i fuochi dell'iperbole calcolando $c = \sqrt{16 + 9} = 5$ da cui segue che i fuochi si trovano in

$$F_1(-5, 0) \quad F_2(5, 0)$$

Da cui segue che la retta $r_1 : y = m_1x + q_1$ passante per P e il fuoco F_1 e la retta $r_2 : y = m_2x + q_2$ passante per P e il fuoco F_2 sono date da

$$r_1 \quad \begin{cases} 0 = -5m_1 + q_1 \\ 4 = \frac{20}{3}m_1 + q_1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m_1 = \frac{12}{35} \\ q_1 = \frac{12}{7} \end{cases} \quad \text{quindi } r_1 : y = \frac{12}{35}x + \frac{12}{7} \quad \Leftrightarrow \quad 12x - 35y + 60 = 0$$

$$r_2 \quad \begin{cases} 0 = 5m_2 + q_2 \\ 4 = \frac{20}{3}m_2 + q_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m_2 = \frac{12}{5} \\ q_2 = -12 \end{cases} \quad \text{quindi } r_2 : y = \frac{12}{5}x - 12 \quad \Leftrightarrow \quad 12x - 5y - 60 = 0$$

- e) Le rette bisettrici delle rette r_1 e r_2 sono formate dai punti che sono equidistanti dalle due rette r_1 e r_2 . Utilizzando il concetto di distanza punto retta sviluppato in precedenza, un punto generico (x, y) si trova sulle bisettrici se e solo se

$$\begin{aligned} d((x, y), r_1) &= d((x, y), r_2) \Leftrightarrow \frac{|12x - 35y + 60|}{\sqrt{12^2 + (-35)^2}} = \frac{|12x - 5y - 60|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} \\ &\Leftrightarrow \frac{|12x - 35y + 60|}{37} = \frac{|12x - 5y - 60|}{13} \end{aligned}$$

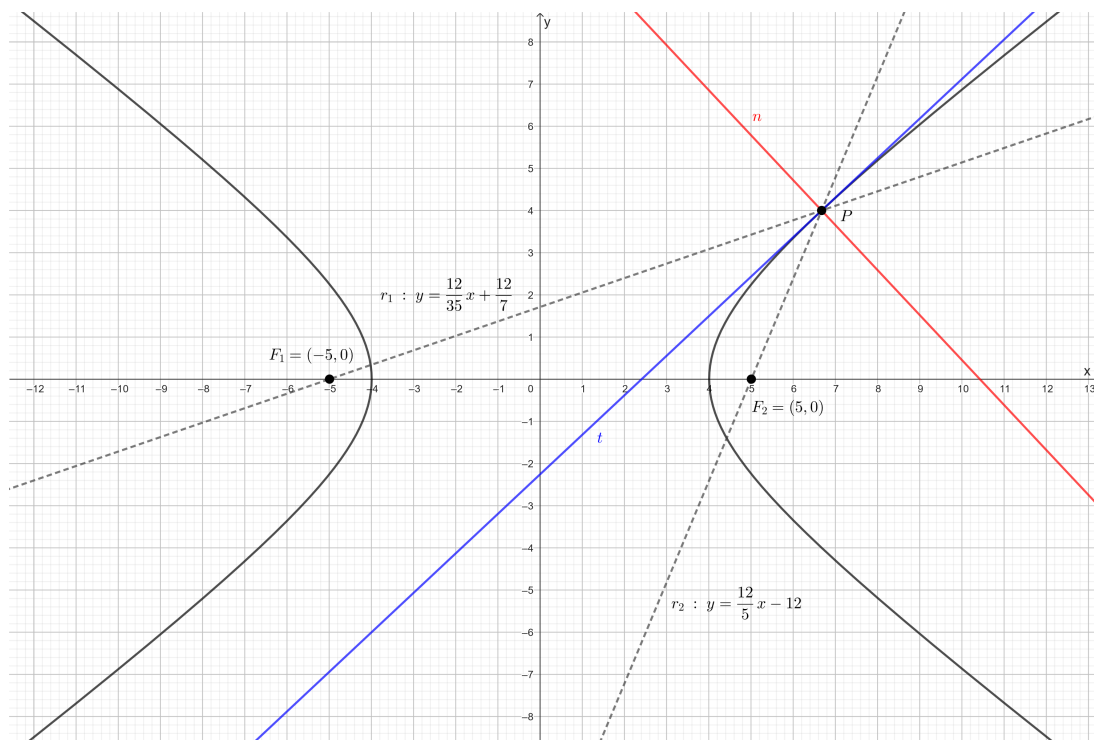
Caso 1: segni uguali $|a| = |b| \Rightarrow a = b$

$$\begin{aligned} \frac{|12x - 35y + 60|}{37} &= \frac{|12x - 5y - 60|}{13} \Leftrightarrow \frac{12x - 35y + 60}{37} = \frac{12x - 5y - 60}{13} \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{16}{15}x + \frac{100}{9} \end{aligned}$$

Caso 2: oppure segni opposti $|a| = |b| \Rightarrow a = -b$

$$\begin{aligned} \frac{|12x - 35y + 60|}{37} &= \frac{|12x - 5y - 60|}{13} \Leftrightarrow \frac{12x - 35y + 60}{37} = \frac{-(12x - 5y - 60)}{13} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{15}{16}x - \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Si nota che le bisettrici delle rette r_1 e r_2 sono in effetti la retta tangente t e la retta normale n all'iperbole passanti per lo stesso punto P trovate in precedenza. Questa in effetti non è una coincidenza ma è una proprietà dell'iperbole che vale per un qualsiasi punto generico P che appartiene ad essa.



Esercizio 4 Proviamo a seguire lo stesso "programma" dato dai punti nell'esercizio precedente, ma per l'ellisse $\mathcal{E}$ ed il punto dato.

- a) Inserendo le coordinate del punto dato $P\left(\frac{18}{5}, 4\right)$ nell'equazione dell'ellisse $\mathcal{E}$ si ottiene

$$\frac{\left(\frac{18}{5}\right)^2}{36} + \frac{4^2}{25} = \frac{324}{25 \cdot 36} + \frac{16}{25} = \frac{324}{900} + \frac{576}{900} = \frac{900}{900} = 1$$

Dato che le coordinate di P soddisfano l'equazione dell'ellisse, il punto si trova sull'ellisse.

- b) Essendo P un punto dell'ellisse, si può utilizzare la formula di sdoppiamento

$$\frac{\frac{18}{5} \cdot x}{36} + \frac{4y}{25} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{5}{8}x + \frac{25}{4}$$

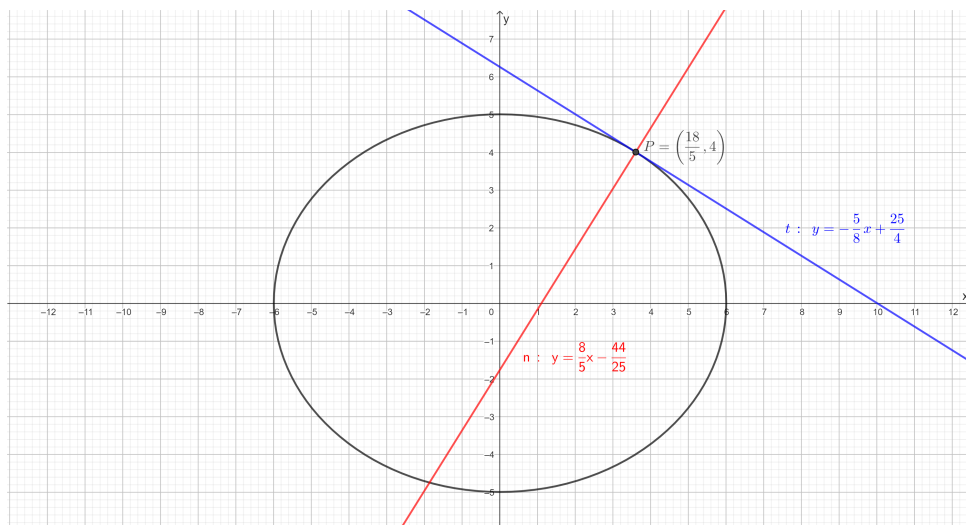
la retta t tangente all'ellisse $\mathcal{E}$ nel punto P è quindi $t : y = -\frac{5}{8}x + \frac{25}{4}$

- c) Sia $n : y = mx + q$ la retta normale cercata, allora deve valere che

$$\begin{cases} m \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) = -1 & \text{la retta } n \text{ deve essere perpendicolare alla retta } t \\ 4 = m \cdot \frac{18}{5} + q & \text{il punto } P \text{ deve appartenere alla retta normale} \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava che $m = \frac{8}{5}$ e inserendo nella seconda si trova che $q = -\frac{44}{25}$ quindi la retta normale cercata è

$$n : y = \frac{8}{5}x - \frac{44}{25}$$



- d) Si determinano i fuochi dell'iperbole calcolando $c = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$ da cui segue che i fuochi si trovano in

$$F_1(-\sqrt{11}, 0) \quad F_2(\sqrt{11}, 0)$$

Da cui segue che la retta $r_1 : y = m_1x + q_1$ passante per P e il fuoco F_1 e la retta $r_2 : y = m_2x + q_2$ passante per P e il fuoco F_2 sono date da

$$r_1 \quad \begin{cases} 0 = -\sqrt{11}m_1 + q_1 \\ 4 = \frac{18}{5}m_1 + q_1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m_1 = \frac{360 - 100\sqrt{11}}{49} \\ q_1 = \frac{360\sqrt{11} - 1100}{49} \end{cases} \quad \text{quindi } r_1 : y = \frac{360 - 100\sqrt{11}}{49}x + \frac{360\sqrt{11} - 1100}{49}$$

$$r_2 \quad \begin{cases} 0 = \sqrt{11}m_2 + q_2 \\ 4 = \frac{18}{5}m_2 + q_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m_2 = \frac{360 + 100\sqrt{11}}{49} \\ q_2 = -\frac{360\sqrt{11} + 1100}{49} \end{cases} \quad \text{quindi } r_2 : y = \frac{360 + 100\sqrt{11}}{49}x - \frac{360\sqrt{11} + 1100}{49}$$

- e) Le rette bisettrici delle rette r_1 e r_2 sono formate dai punti che sono equidistanti dalle due rette r_1 e r_2 . Utilizzando il concetto di distanza punto retta sviluppato in precedenza, un punto generico (x, y) si trova sulle bisettrici se e solo se

$$\begin{aligned}
 d((x, y), r_1) &= d((x, y), r_2) \\
 \Leftrightarrow \frac{|(360 - 100\sqrt{11})x - 49y + 360\sqrt{11} - 1100|}{\sqrt{(360 - 100\sqrt{11})^2 + (-49)^2}} &= \frac{|(360 + 100\sqrt{11})x - 49y - 360\sqrt{11} - 1100|}{\sqrt{(360 + 100\sqrt{11})^2 + (-49)^2}} \\
 \Leftrightarrow \frac{|(360 - 100\sqrt{11})x - 49y + 360\sqrt{11} - 1100|}{375 - 96\sqrt{11}} &= \frac{|(360 + 100\sqrt{11})x - 49y - 360\sqrt{11} - 1100|}{375 + 96\sqrt{11}}
 \end{aligned}$$

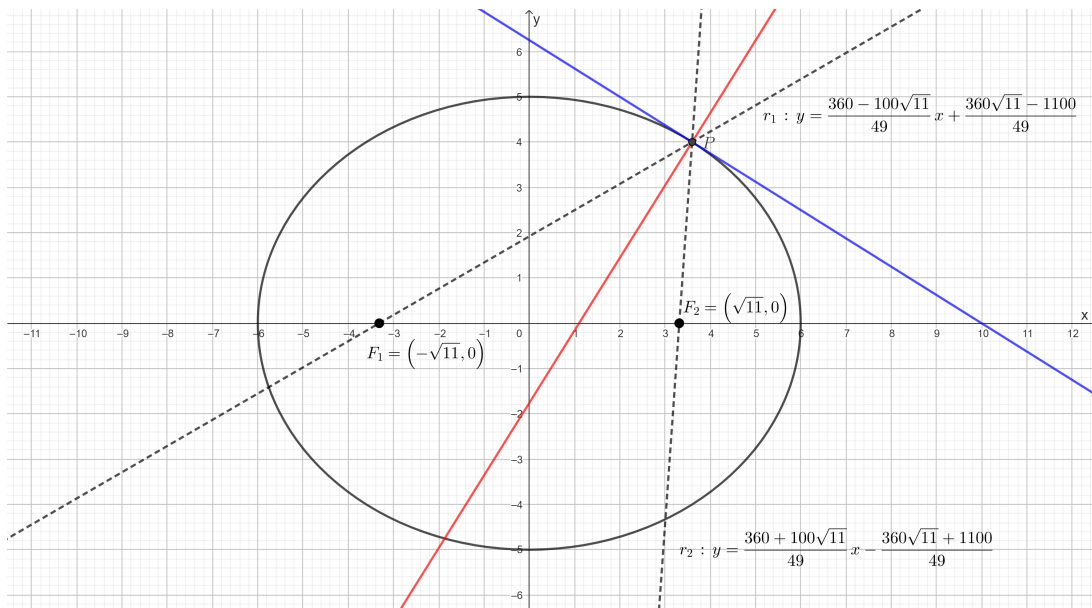
Caso 1: segni uguali $|a| = |b| \Rightarrow a = b$

$$\begin{aligned}
 \frac{|(360 - 100\sqrt{11})x - 49y + 360\sqrt{11} - 1100|}{375 - 96\sqrt{11}} &= \frac{|(360 + 100\sqrt{11})x - 49y - 360\sqrt{11} - 1100|}{375 + 96\sqrt{11}} \\
 (375 + 96\sqrt{11}) [(360 - 100\sqrt{11})x - 49y + 360\sqrt{11} - 1100] &= [(360 + 100\sqrt{11})x - 49y - 360\sqrt{11} - 1100] (375 - 96\sqrt{11}) \\
 &\vdots \\
 y &= -\frac{5}{8}x + \frac{25}{4}
 \end{aligned}$$

Caso 2: oppure segni opposti $|a| = |b| \Rightarrow a = -b$

$$\begin{aligned}
 \frac{|(360 - 100\sqrt{11})x - 49y + 360\sqrt{11} - 1100|}{375 - 96\sqrt{11}} &= \frac{|(360 + 100\sqrt{11})x - 49y - 360\sqrt{11} - 1100|}{375 + 96\sqrt{11}} \\
 (375 + 96\sqrt{11}) [(360 - 100\sqrt{11})x - 49y + 360\sqrt{11} - 1100] &= - [(360 + 100\sqrt{11})x - 49y - 360\sqrt{11} - 1100] (375 - 96\sqrt{11}) \\
 &\vdots \\
 y &= \frac{8}{5}x - \frac{44}{25}
 \end{aligned}$$

Si nota che le bisettrici delle rette r_1 e r_2 sono in effetti la retta tangente t e la retta normale n all'ellisse passanti per lo stesso punto P trovate in precedenza. Questa in effetti non è una coincidenza ma è anche una proprietà dell'ellisse che vale per un qualsiasi punto generico P appartenente ad essa.



Esercizio 5 Cominciamo a verificare la posizione reciproca tra la retta r e l'ellisse $\mathcal{E}$, cioè ci chiediamo se la retta r interseca, non interseca, oppure è tangente all'ellisse. Risolviamo perciò il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1 \\ y = x + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x^2 + 49y^2 = 1225 \\ y = x + 10 \end{cases}$$

Inserendo la II nella I si ottiene l'equazione di secondo grado in x seguente

$$25x^2 + 49(x + 10)^2 = 1225 \Leftrightarrow 74x^2 + 980x + 3675 = 0$$

Il cui discriminante è $\Delta = 980^2 - 4 \cdot 74 \cdot 3675 = -127400 < 0$. Essendo il discriminante negativo, il sistema non possiede delle soluzioni reali. Non ci sono quindi punti di intersezione tra la retta e l'ellisse.

Riflettendo sulla geometria del problema, attraverso uno schizzo appropriato, per risolvere il problema è necessario trovare i punti appartenenti all'ellisse per i quali passano le rette tangenti r_1 e r_2 che sono parallele (e quindi hanno la stessa pendenza) della retta data $y = x + 10$. La distanza tra questi punti e la retta data sono le distanze minime e massime delle quali parla il problema. Dato che la pendenza delle rette tangenti è nota (uguale a uno), sfruttando il teorema seguente visto in classe è possibile risalire alle ordinate all'origine delle due rette tangenti r_1 e r_2 :

Teorema (condizioni di tangenza): Una retta $y = mx + q$ è tangente ad un'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ se e solo se

$$a^2m^2 + b^2 = q^2$$

le rette tangenti all'ellisse e parallele alla retta data $y = x + 10$ hanno equazione $y = x + q$. Per ricavare le ordinate all'origine si risolve

$$a^2m^2 + b^2 = q^2 \Leftrightarrow 49 \cdot 1^2 + 25 = q^2 \Leftrightarrow q = \pm\sqrt{74}$$

Le rette tangenti sono dunque

$$r_1 : y = x + \sqrt{74} \quad r_2 : y = x - \sqrt{74}$$

Ora, si trova il punto P_1 (risp. P_2) appartenente all'ellisse per il quale passa la retta r_1 (risp. r_2) risolvendo:

Si trova P_1 :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1 \\ y = x + \sqrt{74} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x^2 + 49y^2 = 1225 \\ y = x + \sqrt{74} \end{cases}$$

Inserendo la II nella I si ottiene l'equazione di secondo grado in x seguente

$$25x^2 + 49(x + \sqrt{74})^2 = 1225 \Leftrightarrow 74x^2 + 98\sqrt{74}x + 2401 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{49}{\sqrt{74}} = -\frac{49\sqrt{74}}{74}$$

da cui con l'equazione della retta si ricava anche $y = -\frac{49\sqrt{74}}{74} + \sqrt{74} = \frac{25\sqrt{74}}{74}$ e quindi

$$P_1 = \left(-\frac{49\sqrt{74}}{74}, \frac{25\sqrt{74}}{74} \right)$$

Si trova P_2 :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1 \\ y = x - \sqrt{74} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x^2 + 49y^2 = 1225 \\ y = x - \sqrt{74} \end{cases}$$

Inserendo la II nella I si ottiene l'equazione di secondo grado in x seguente

$$25x^2 + 49(x - \sqrt{74})^2 = 1225 \Leftrightarrow 74x^2 - 98\sqrt{74}x + 2401 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{49}{\sqrt{74}} = \frac{49\sqrt{74}}{74}$$

da cui con l'equazione della retta si ricava anche $y = \frac{49\sqrt{74}}{74} - \sqrt{74} = -\frac{25\sqrt{74}}{74}$ e quindi

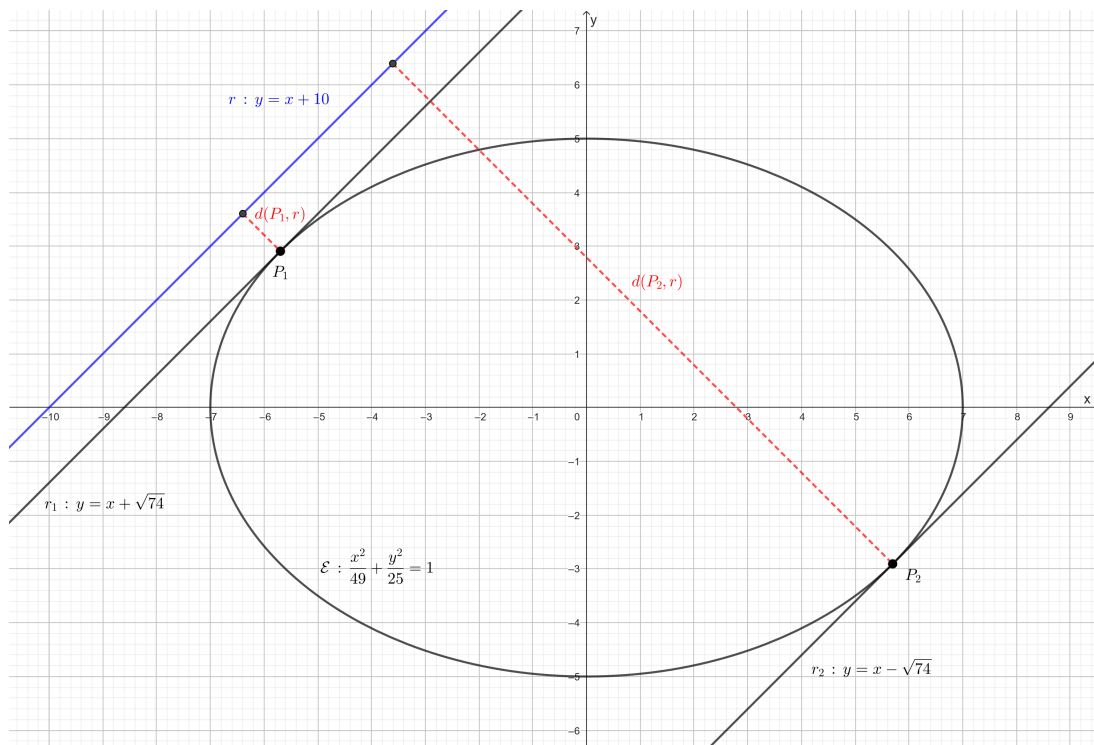
$$P_2 = \left(\frac{49\sqrt{74}}{74}, -\frac{25\sqrt{74}}{74} \right)$$

Ora che sono stati trovati i punti P_1 e P_2 non resta che calcolare la distanza minima e massima di questi

punti dalla retta $r : y = x + 10 \Leftrightarrow x - y + 10 = 0$ utilizzando la formula dimostrata in precedenza:

$$d_{min} = d(P_1, r) = \frac{\left| 1 \cdot \left(-\frac{49\sqrt{74}}{74} \right) - 1 \cdot \frac{25\sqrt{74}}{74} + 10 \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{10 - \sqrt{74}}{\sqrt{2}} \approx 0.988305281$$

$$d_{max} = d(P_2, r) = \frac{\left| 1 \cdot \frac{49\sqrt{74}}{74} - 1 \cdot \left(-\frac{25\sqrt{74}}{74} \right) + 10 \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{10 + \sqrt{74}}{\sqrt{2}} \approx 13.15383034$$



Esercizio 6 Inizialmente si cercano i punti di intersezione tra l'ellisse $\mathcal{E}$ e l'iperbole $\mathcal{I}$ risolvendo

$$\begin{cases} \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1 \\ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x^2 + 36y^2 = 396 & I \\ 9x^2 - 16y^2 = 144 & II \end{cases}$$

Sommando i $\frac{4}{9}$ della I con la II equazione si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{4}{9}(11x^2 + 36y^2) + 9x^2 - 16y^2 &= \frac{4}{9}396 + 144 \Leftrightarrow \frac{44}{9}x^2 + 16y^2 + 9x^2 - 16y^2 = 176 + 144 \\ &\Leftrightarrow \frac{125}{9}x^2 = 320 \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{576}{125} \\ &\Leftrightarrow x = \pm \frac{24}{5} \end{aligned}$$

Sostituendo ad esempio nella II si ottiene che

$$\begin{aligned} 9\left(\pm\frac{24}{5}\right)^2 - 16y^2 &= 144 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5184}{25} - 16y^2 = 144 \\ \Leftrightarrow \quad y^2 &= \frac{99}{25} \\ \Leftrightarrow \quad y &= \pm\frac{3\sqrt{11}}{5} \end{aligned}$$

Da cui segue che i punti di intersezione tra l'ellisse $\mathcal{E}$ e l'iperbole $\mathcal{I}$ sono

$$P_1\left(\frac{24}{5}, \frac{3\sqrt{11}}{5}\right) \quad P_2\left(-\frac{24}{5}, \frac{3\sqrt{11}}{5}\right) \quad P_3\left(-\frac{24}{5}, -\frac{3\sqrt{11}}{5}\right) \quad P_4\left(\frac{24}{5}, -\frac{3\sqrt{11}}{5}\right)$$

Non resta da verificare che le rette tangenti all'ellisse $\mathcal{E}$ e all'iperbole $\mathcal{I}$ passanti per i punti P_1 , P_2 , P_3 e P_4 sono perpendicolari tra loro.

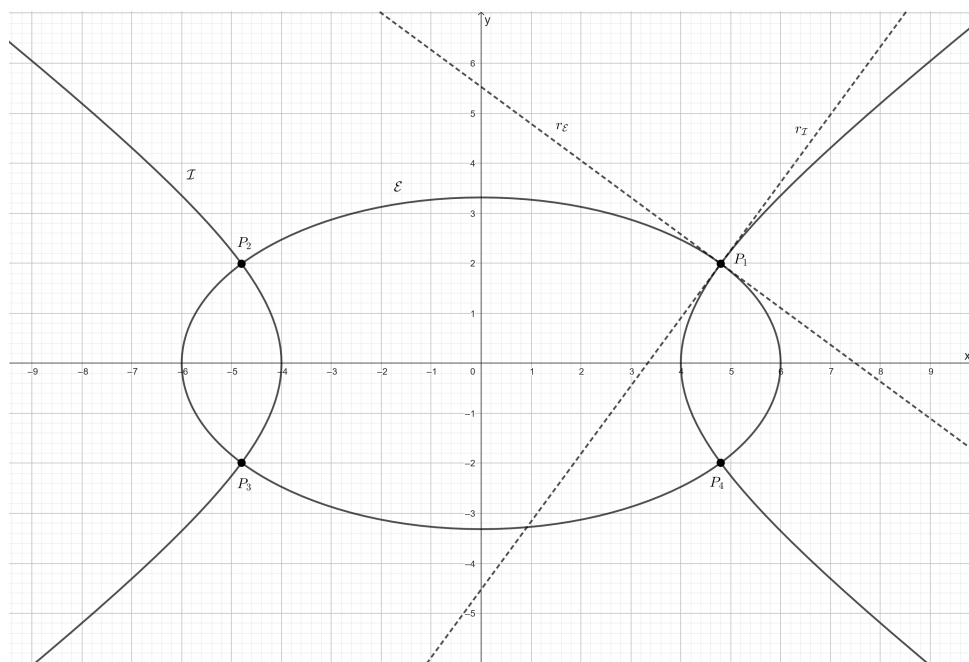
Rette tangenti passanti per P_1 : Sia la retta $t_{\mathcal{E}}$ la retta tangente all'ellisse passante per P_1 e la retta $t_{\mathcal{I}}$ tangente all'iperbole sempre passante per P_1 . Con le formule di sdoppiamento (essendo P_1 sia un punto dell'ellisse $\mathcal{E}$ sia dell'iperbole $\mathcal{I}$) si ricava

$$\begin{aligned} t_{\mathcal{E}} : \frac{x\left(\frac{24}{5}\right)}{36} + \frac{y\left(\frac{3\sqrt{11}}{5}\right)}{11} &= 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{2\sqrt{11}}{9}x + \frac{5\sqrt{11}}{3} \\ t_{\mathcal{I}} : \frac{x\left(\frac{24}{5}\right)}{16} - \frac{y\left(\frac{3\sqrt{11}}{5}\right)}{9} &= 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{9\sqrt{11}}{22}x - \frac{15\sqrt{11}}{11} \end{aligned}$$

Si nota immediatamente come il prodotto delle pendenze delle due rette tangenti è

$$-\frac{2\sqrt{11}}{9} \cdot \frac{9\sqrt{11}}{22} = -1$$

Da cui segue che le rette sono perpendicolari tra loro, il che conferma l'affermazione per il punto P_1 , come da illustrazione seguente.



Rette tangenti passanti per P_2 , P_3 e P_4 : per simmetria la stessa identica situazione si ripresenta anche nei punti P_2 , P_3 e P_4 . Fatto facilmente verificabile anche algebricamente adattando il metodo precedente a questi casi.

Esercizio 7 Come negli esercizi di questo tipo già visti in precedenza, si completa il quadrato e si ricava:

$$11x^2 - 4x + 20y^2 - 372 = 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{2}{11}\right)^2}{\left(\frac{64}{11}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{32}{\sqrt{55}}\right)^2} = 1$$

Dall'equazione cartesiana di questa ellisse, si possono poi ricavare le coordinate dei vertici aggiungendo e sottraendo opportunamente le lunghezze dei semiassi alle coordinate del centro $\left(\frac{2}{11}, 0\right)$, ottenendo così

$$V_1(6, 0) \quad V_2\left(\frac{2}{11}, \frac{32}{\sqrt{55}}\right) \quad V_3\left(-\frac{62}{11}, 0\right) \quad V_4\left(\frac{2}{11}, -\frac{32}{\sqrt{55}}\right)$$

Questo significa che i valori interi possibili delle ascisse x appartengono all'insieme

$$x \in \left[-\frac{62}{11}; 6\right] \cap \mathbb{Z} = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Mentre i valori di interi possibili delle ordinate y appartengono all'insieme

$$\left[-\frac{32}{\sqrt{55}}; \frac{32}{\sqrt{55}}\right] \cap \mathbb{Z} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

Utilizzando l'equazione iniziale dell'ellisse, analizziamo singolarmente i casi delle ordinate (perché sono di meno) e vediamo se producono delle coppie $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$. Si noti che nell'equazione compare unicamente y^2 , ciò significa che possiamo analizzare a due a due i casi, $y = \pm 4$, $y = \pm 3$, $y = \pm 2$, $y = \pm 1$ e singolarmente il caso $y = 0$.

Caso $y = \pm 4$: $11x^2 - 4x + 20(\pm 4)^2 - 372 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = \frac{26}{11}$

Caso $y = \pm 3$: $11x^2 - 4x + 20(\pm 3)^2 - 372 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -4 \quad x_2 = \frac{48}{11}$

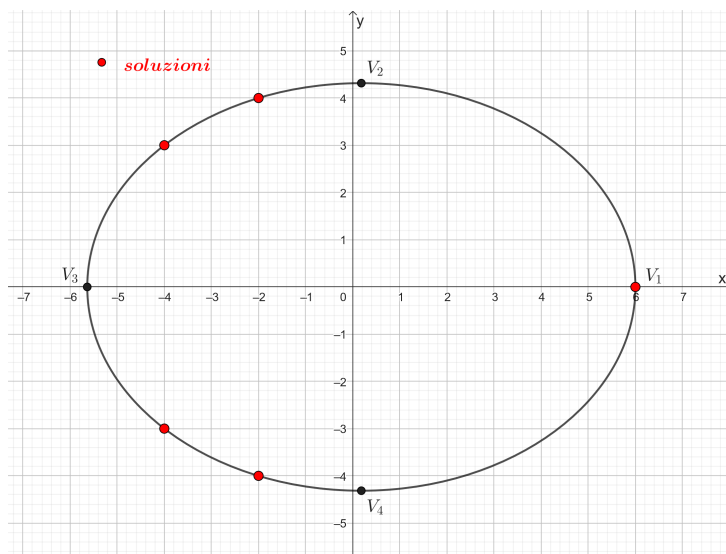
Caso $y = \pm 2$: $11x^2 - 4x + 20(\pm 2)^2 - 372 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{4}{11} \quad x_2 = -\frac{292}{11}$

Caso $y = \pm 1$: $11x^2 - 4x + 20(\pm 1)^2 - 372 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{969}}{11}$

Caso $y = 0$: $11x^2 - 4x + 20(0)^2 - 372 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 6 \quad x_2 = -\frac{62}{11}$

Dai calcoli si evince che le uniche soluzioni intere sono:

$$\mathcal{S} = \{(-2, \pm 4); (-4, \pm 3); (6, 0)\} \subseteq \mathbb{Z}^2$$



Oss: si nota come le soluzioni, contrariamente ai casi già trattati, non si trovano tutte sui vertici dell'ellisse.