



LICEO CANTONALE DI BELLINZONA

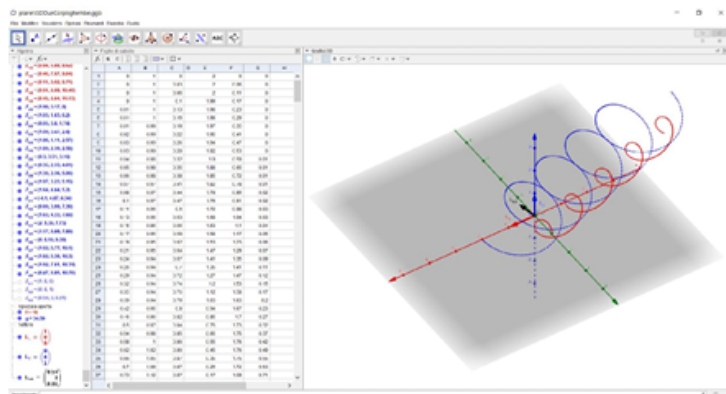
CORSO DI AGGIORNAMENTO - 5 MAGGIO 2026

PERCORSI DI FISICA FAM (MONTE ORE 2024-25)

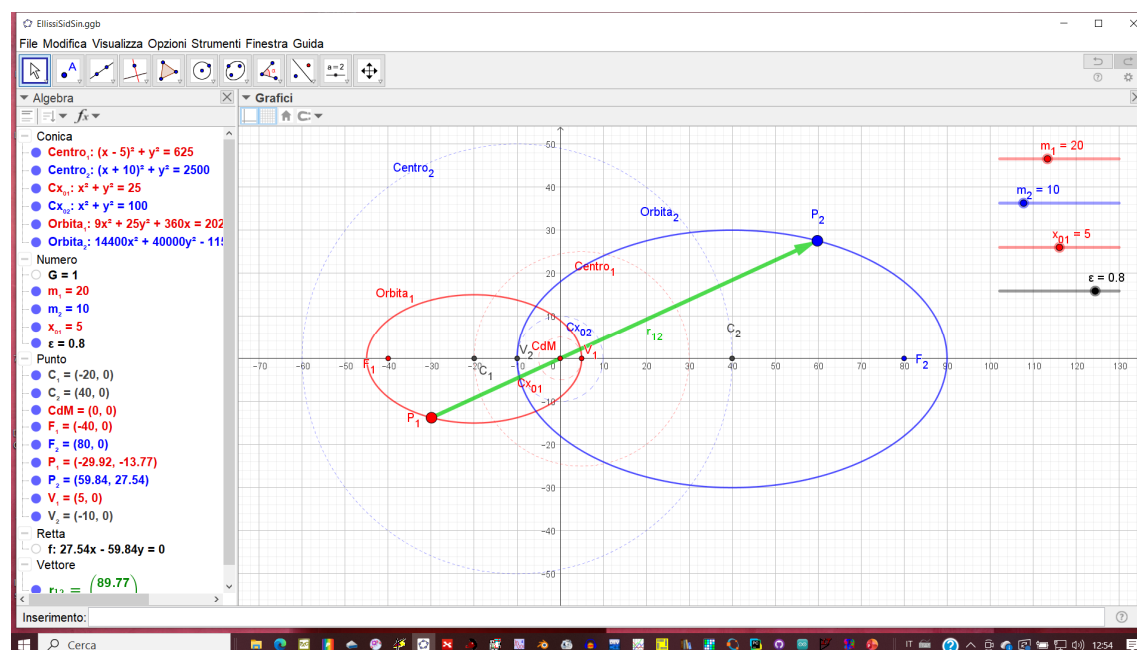
Idee sul problema dei 2-3 corpi

T. CORRIDONI

F. DE VITO



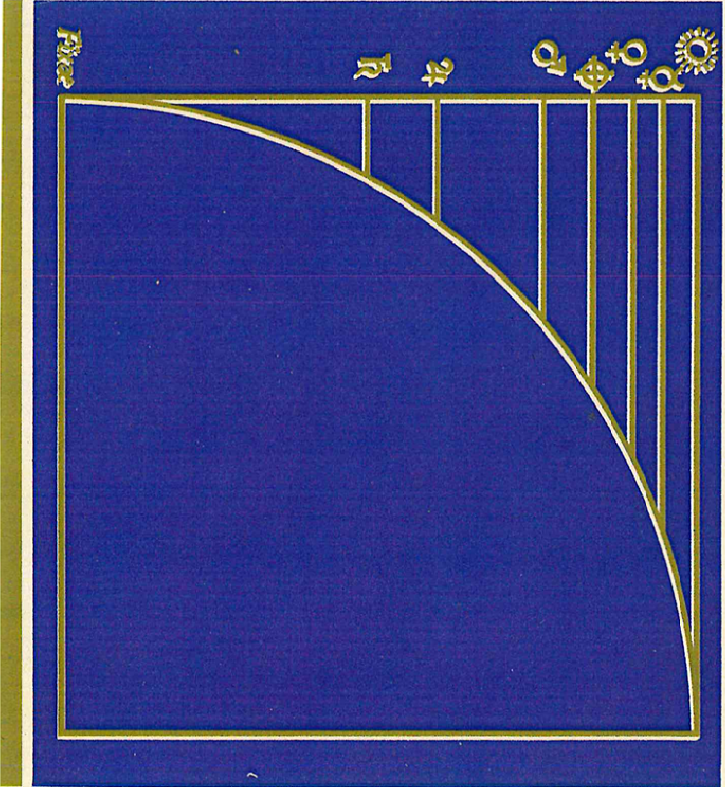
Cosa **scoprire ancora**... sulle leggi di Kepler...
(e forse su altre cose che abbiamo studiato e insegniamo...)
... **con** gli studenti ?



T. Corridoni
Corso di aggiornamento
Liceo di Bellinzona
05/05/26

NORWOOD RUSSELL HANSON

I MODELLI DELLA SCOPERTA SCIENTIFICA

RICERCA SUI FONDAMENTI
CONCETTUALI DELLA SCIENZA

Domande a confronto...

Consideriamo Keplero: immaginiamo che egli si trovi su una collina e che osservi il sorgere del Sole in compagnia di Tycho Brahe. Keplero considerava il Sole fisso: era la Terra a muoversi. Tycho Brahe seguiva invece Tolomeo e Aristotele, almeno in riferimento all'opinione che la Terra fosse fissa al centro e che tutti gli altri corpi celesti orbitassero attorno ad essa. *Keplero e Tycho Brahe vedono la medesima cosa quando osservano il sorgere del Sole?*

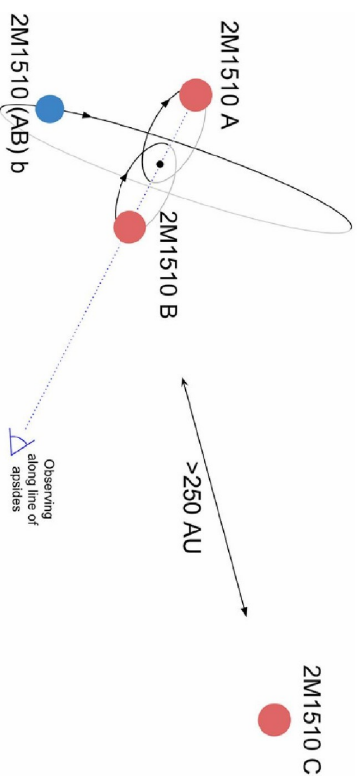


Fig. 5. Configuration of 2M1510 and naming convention for the various bodies. Brown dwarfs are in red, and the planet is in blue. Direction to Earth relative to the binary is shown.

T.C. e F.d.V. (che nel suo LAM vuole simulare il Sistema Solare al PC) osservano Fig. 1: vedono la stessa cosa ?

```

1: // Problema di Kepler in un sistema inerziale
2:
3: # include <iostream >
4: # include <fstream >
5: # include <cstdlib>
6: # include <string>
7: # include <cmath>
8: using namespace std;
9:
10: const int P = 210000;
11: double G, m1, m2; // anche se introdotti da file
12: double T[P]; // vettore tempo
13: double X1[P], Y1[P], Z1[P], Vx1[P], Vy1[P], Vz1[P], Ec1[P], Et1[P], Lx1[P], Ly1[P], Lz1[P], Lt1[P]; // vettori tempo,
    posizioni, velocita', energie, momento, pianeta 1
14: double X2[P], Y2[P], Z2[P], Vx2[P], Vy2[P], Vz2[P], Ec2[P], Et2[P], Lx2[P], Ly2[P], Lz2[P], Lt2[P]; // vettori tempo,
    posizioni, velocita', energie, momento, pianeta 2
15: double Ept[P], ET[P], LT[P]; // energia potenziale comune, energia e momento angolare totali del sistema
16: double ax1, ay1, az1, Epot, Ecin1, Lax1, Lay1, Laz1; // accelerazioni, energie, momento angolare pianeta 1
17: double ax2, ay2, az2, Ecin2, Lax2, Lay2, Laz2; // accelerazioni, energie, momento angolare pianeta 2
18: double v1circ, v2circ; // velocita' per moto circolare
19:
20: // procedura di integrazione
21: void RK(const double& T1, const double& Tf, const double& X01, const double& Vx01, const double& Y01, const double& Vy01,
    const double& Z01, const double& Vz01, const double& X02, const double& Vx02, const double& Y02, const double& Vy02, const
    double& Z02, const double& Vz02, const int& Nt);
22: void RKSTEP(double& t, double& x1, double& vx1, double& y1, double& vy1, double& z1, double& vz1, double& x2, double& vx2,
    double& y2, double& vy2, double& z2, double& vz2, const double& dt);
23:
24: // funzioni accelerazione, velocita', energia e momento
25: double acc(double& x1, double& y1, double& z1, double& x2, double& y2, double& z2, double& ax1, double& ay1, double& az1,
    double& ax2, double& ay2, double& az2);
26: double vel(double& vx1, double& vy1, double& vz1, double& vx2, double& vy2, double& vz2);
27: double Ep(double& x1, double& y1, double& z1, double& x2, double& y2, double& z2, double& Epot);
28: double Enc(double& m1, double& vx, double& vy, double& vz, double& Ecin);
29: double La(double& m1, double& x, double& y, double& z, double& vx, double& vy, double& vz, double& Lax, double& Lay, double&
    Laz);
30:
31: int main() // PROGRAMMA PRINCIPALE

```

```

141 # Sistem
142 class System:
143     def __init__(self, bodies):
144         self.bodies = bodies
145         self.position = vector(0,0,0)
146         self.speed = vector(0,0,0)
147         self.angular_momentum = []
148         self.energy = []
149         self.lagrange = [sphere(canvas=scene3, pos=vector(0,0,0), radius=12, color=
            color.white,
150             opacity=0.5, make_trail=False), sphere(canvas=scene3, pos=vector(0,0,0),
            radius=12,
151             color=color.white, opacity=0.5, make_trail=False)]
152
153     for i in range(3):
154         self.angular_momentum.append(vector(0,0,0))
155         self.energy.append(0)
156

```

```

105 class Body:
106     def __init__(self, name, mass, loc, clr, spd, fixed=False):
107         self.name = name
108         self.rd = 20
109         self.clr = clr
110         self.mass = mass
111         self.locat = []
112         self.speed = []
113         self.accel = []
114         self.fixed = fixed
115         self.momentum = []
116         self.angular_momentum = []
117         self.kinetik_energy = []
118         self.klist = []
119         self.jlist = []
120
121     for i in range(3):
122         self.locat.append(loc)
123         self.speed.append(spd)
124         self.accel.append(vector(0,0,0))
125         self.momentum.append(vector(0,0,0))
126         self.angular_momentum.append(vector(0,0,0))
127         self.kinetik_energy.append(0)
128
129     for i in range(4):
130         self.klist.append(vector(0,0,0))
131         self.jlist.append(vector(0,0,0))
132
133     self.update()
134
135     def update(self):
136         for i in range(3):
137             self.momentum[i] = self.mass*self.speed[i]
138             self.angular_momentum[i] = cross(self.locat[i], self.momentum[i])
139             self.kinetik_energy[i] = modulo(vt=self.speed[i])**2*self.mass*0.5
140

```

chi cerca di apprendere qualcosa non lo vede come chi lo ha già appreso; a causa di ciò e dell'evolvere delle sorgenti e dei processi di organizzazione della cultura, problemi risolti anche da tempo da una comunità di esperti/e sono continuamente riscoperti e rilanciati dai non esperti/e in vesti sempre nuove.

l'apprendimento significativo, almeno in campo scientifico, richiede un orientamento all'interno di una pluralità di paradigmi, perché generazione dopo generazione i problemi ritornano in forme apparentemente diverse che richiedono trattazioni molteplici e con strumenti diversi. In breve: le materie evolvono, gli studenti cambiano ma i problemi tornano.

A causa di ciò è da almeno 30 anni che un/a docente non può più essere qualcuno che, volendo esagerare, *trasmette il sapere e per verificarne la ricezione (radiofonica)* fa per tutta la sua vita lavorativa le stesse domande di cui sa già la risposta. Se non vuole essere sostituito da AI, influencer e siti “dedicati” ai problemi che ritornano (si pensi al terrapiattismo) [5], *non può utilizzare solo lezioni, ossia letture* in cui *s-piega* (come un foglio prima piegato) una *teoria*, ossia una *fila* di passaggi logici. Questa è *una delle forme*, adatta forse per *in-segnare* un singolo filo ma non l'intera *trama concettuale* di una materia [6], che non è infatti solo *complicata*, ossia *piegata* come il suddetto foglio, ma *complessa*, ossia *intrecciata*, formata da più fili [7]. Tale analogia da tessitore, oggi poi non basta neanche più, perché si è visto che *oltre un certo grado di complessità i saperi non possono più essere linearizzati, districati in “parti più piccole”, come appunto fili di una trama*, e sono pertanto appresi secondo *livelli di competenza* più o meno discontinui, insieme irriducibili di *sapere, saper essere e saper fare* (come si dice in pedagogia) difficilmente costruiti da una persona che ascolta solamente un qualche trasmettitore, umano o elettronico. Non a caso la pratica essenziale del *laboratorio*, che *immerge operativamente* una persona in una certa trama concettuale, mediante esperienza diretta, nelle scuole è stata estesa dalle scienze sperimentali alla matematica, alle lingue, al teatro.

In breve e senza retorica, occorre insomma riconoscere che il problema del come un/a docente possa rispondere al *ritorno dei problemi* non richiede una riflessione ideologica ma epistemologica, perché a ben vedere. . . c'è sempre stato. Chi insegna sa infatti che ad un/a docente sono sempre più richieste competenze molto particolari:

1. *deve sapere la materia, e saperla in più modi.*
2. *deve saper ricostruire e far ricostruire le trame contestuali (o anche i singoli "filii") di una o più materie (in ottica interdisciplinare), in uno o più paradigmi,*
3. *deve saper comunicare quanto sa non per trasmettere, ma per innescare l'apprendimento, con nuovi mezzi, nuovi linguaggi, estendendo in questo stesso modo quanto sa, che non è statico, ma si evolve anche solo nel linguaggio;*
4. *deve saper sostenere percorsi di apprendimento collettivi ed individuali definiti nel tempo in cui vive. Il teorema di Pitagora non è "di Pitagora" ma di chi lo sa usare*
5. *deve fare dell'apprendimento altrui (e proprio) l'oggetto del suo studio scientifico,*
6. *deve riconoscere l'insieme di tutto quanto detto su di sé, preparandosi ad imparare per tutta la vita in continuità con scienziati/e, colleghi/e, studenti e studentesse,*

Nota: «deve» in realtà è... «deve avere piacere di...».
È un «mestiere», non un «impiego»...

1. già nel problema dei due corpi, l'utilizzo della *grafica 3D*, accessibile e soddisfacente, ha spinto verso *sviluppi matematici più geometrici che algebrici*. Al classico problema differenziale in coordinate polari, pur introdotto (Par. [1.1](#)), è stata preferita una *trattazione prevalentemente vettoriale* a partire dagli invarianti del moto (Par. [1.1.2](#)). C'è stata quindi fin da subito una *intrinseca coesistenza fra paradigmi*;

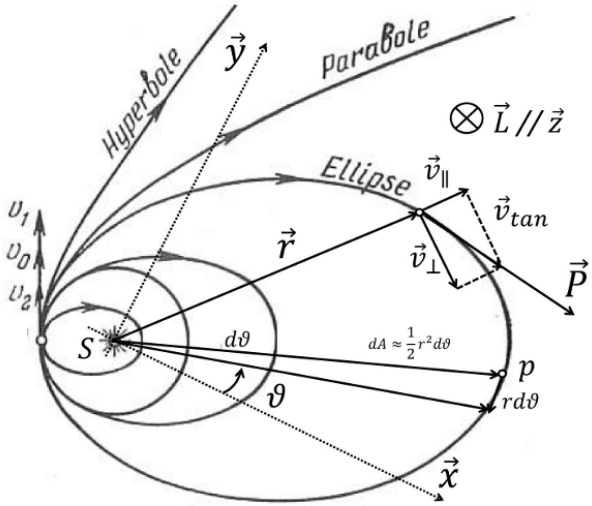


Figura 1.1: Traiettorie del pianeta p attorno al Sole S al variare del valore iniziale v_i della sua velocità tangenziale $\vec{v}_{tan}$, rappresentate in un riferimento cartesiano (x, y) e polare (r, θ) , centrati su S , posti nel piano ortogonale al momento angolare $\vec{L}$ di p , parallelo all'asse $\vec{z}$ (chiralità destrorsa). Il verso di percorrenza è orario: $\vec{L}$ entra nel piano ($L < 0$) e z ne esce. Sono indicate anche le velocità radiale $\vec{v}_{//}$ e ortogonale $\vec{v}_{\perp}$ (componenti di $\vec{v}_{tan}$), la quantità di moto $\vec{P} = m\vec{v}_{tan}$ di p e l'area dA spazzata dal vettore $\vec{r}$ nella rotazione di angolo infinitesimo $d\theta$. Le traiettorie risultano sezioni coniche, riferite agli assi scegliendo $\theta = 0$ all'afelio o al perielio (fig. modificata da [\[13\]](#)).

$$L = I\dot{\theta} = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{L} = 0 = m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) = mr(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{GM}{r^2} \cos \theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cos \theta - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \sin \theta \\ \ddot{y} = -\frac{GM}{r^2} \sin \theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \theta + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{C}{mr^2} \\ \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \end{cases} \quad (1.5)$$

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{C}{r} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{C}{r} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}\right) - \frac{C}{r} \quad (1.6)$$

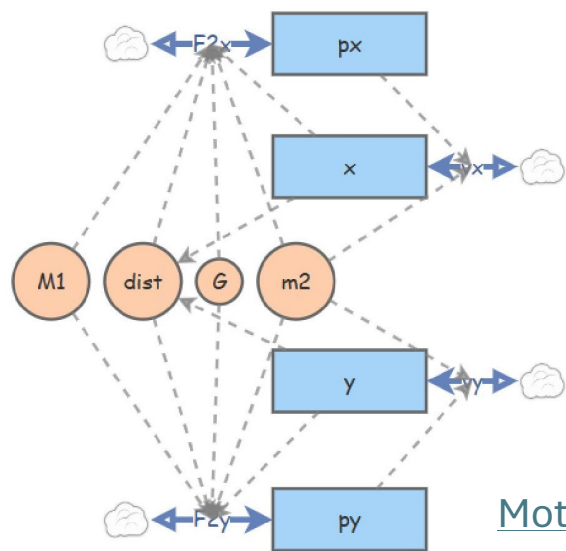
$$\frac{dr}{d\theta} = \pm r \sqrt{hr^2 + kr - 1} \quad h = \frac{2mE}{L^2} \quad k = \frac{2mC}{L^2} \quad (1.9)$$

$$r(\theta) = \frac{p}{1 \pm \epsilon \cos(\theta - \theta_0 - \delta)} \quad (1.13) \quad \delta = \arccos \frac{\rho_0 - 1}{\epsilon \rho_0},$$

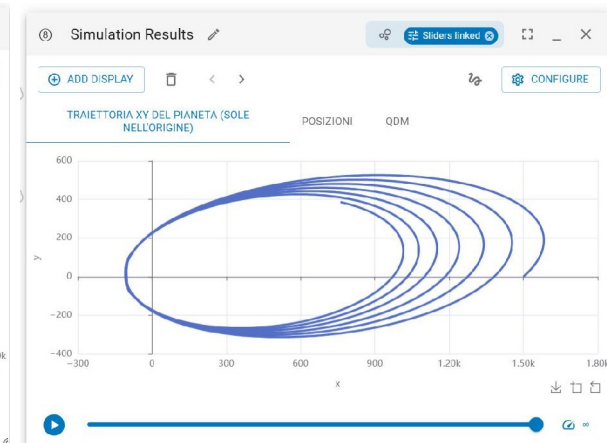
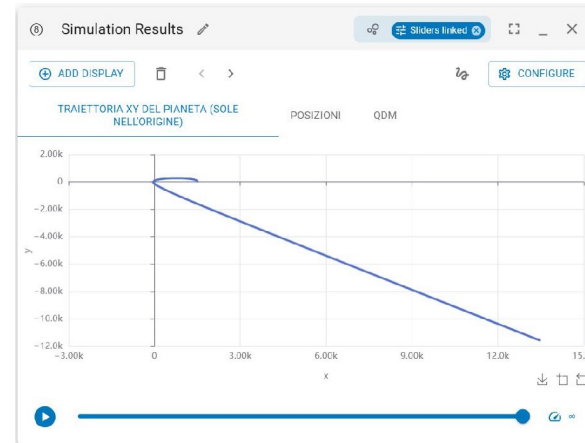
$$p = \frac{L^2}{mC} \quad \epsilon = +\sqrt{1 + 2\frac{EL^2}{mC^2}}$$

Per $\epsilon \neq 1$ si ha quindi l'equazione di una conica in coordinate cartesiane:

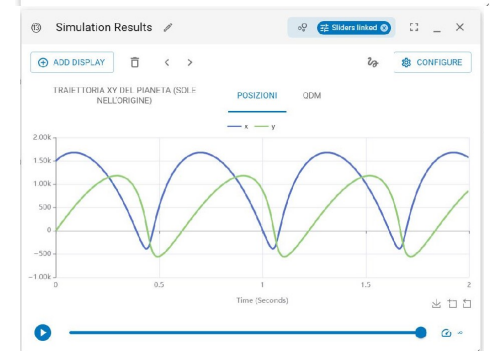
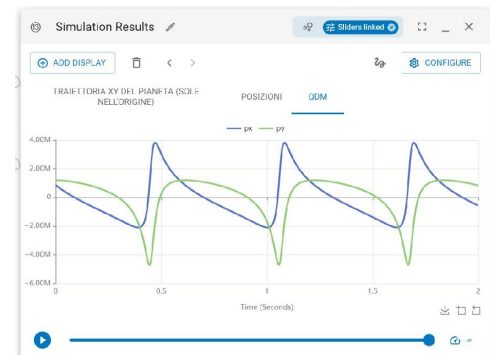
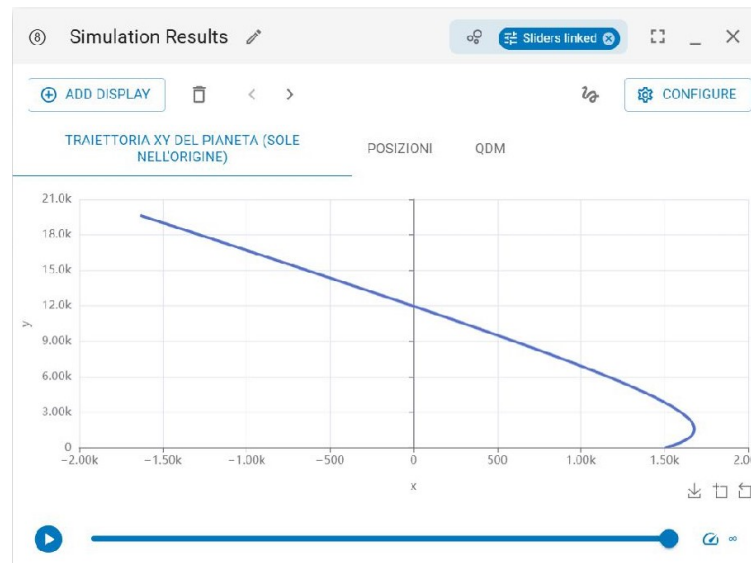
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{\text{sgn}(E)y^2}{b^2} = 1 \quad a = \frac{p}{|1 - \epsilon^2|} = \frac{C}{2|E|} \quad x_0 = \epsilon a \quad b^2 = pa = \frac{L^2}{2m|E|} \quad (1.16)$$

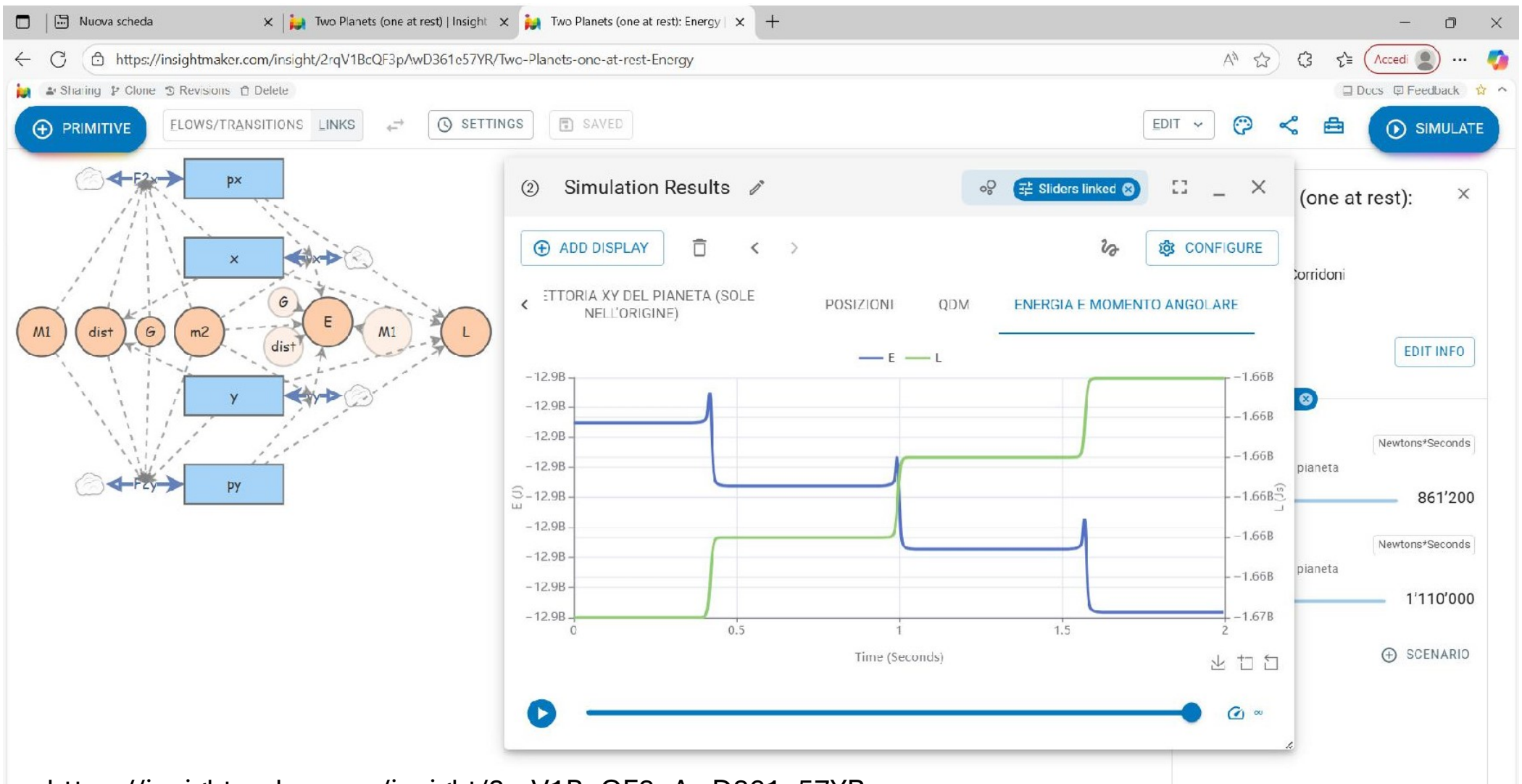


$$\begin{aligned}
 & m_2 = 200\text{kg} \\
 & P = (x_{0,2} = 1500\text{m}, y_{0,2} = 0) \\
 & p_{2,0} = (p_{0,2x}, p_{0,2y}) \\
 & M_1 = 2 \cdot 10^{21}\text{kg} \\
 & O = (x_{0,1} = 0, y_{0,1} = 0) \\
 & p_{1,0} = (p_{0,1x} = 0, p_{0,1y} = 0)
 \end{aligned}$$



Moto di un pianeta attorno al suo Sole (fermo) | Insight Maker





<https://insightmaker.com/insight/2rqV1BcQF3pAwD361e57YR>

2. ciò ha portato ad utilizzare subito *il vettore di Runge-Lenz, che si è quindi dovuto “riscoprire” nella trattazione differenziale*, dove non viene evidenziato in quanto è consuetudine impostare il problema di Kepler in un riferimento in cui le orbite coniche vengono alla fine automaticamente riferite agli assi. *La simulazione al calcolatore, al contrario, spinge verso la scelta di condizioni iniziali e riferimenti del tutto arbitrari*, rendendo l’approccio differenziale più difficile, ma estendendo significativamente il valore dei suoi risultati;

1.1.2 Trovare le orbite senza equazioni differenziali

La simmetria delle traiettorie rispetto all’orientazione δ definita in Eq. 1.13, che indica ad es. la direzione del semiasse maggiore nelle traiettorie ellittiche, suggerisce di cercare un *invariante* oltre all’energia ed al momento angolare. Essendo δ l’inclinazione del vettore $\vec{P} \times \vec{L}$ quando il pianeta è nell’afelio/perielio, si studia come cambia questo vettore nelle altre posizioni. Dalle Eq. 1.3 si trova:

$$\vec{P}(t) \times \vec{L} = m(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}) \times mr^2\dot{\theta}\hat{k} = m^2r^2\dot{\theta}((r\dot{\theta}\sin\theta - \dot{r}\cos\theta)\hat{j} + (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)\hat{i}) \quad (1.26)$$

Ma sostituendo $r(\theta)$ e $\dot{r}(\theta) = -\frac{r^2}{p}\epsilon\sin(\theta - \theta_0 - \delta)\dot{\theta}$ (da Eq. 1.13), e $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$, si ha:

$$\vec{P}(t) \times \vec{L} = mC(\cos(\theta - \theta_0 - \delta)\hat{i} + \sin(\theta - \theta_0 - \delta)\hat{j} - \epsilon\hat{i}) \Rightarrow \epsilon\hat{i} = \hat{r}(t) - \frac{\vec{P}(t) \times \vec{L}}{mC} \quad (1.27)$$

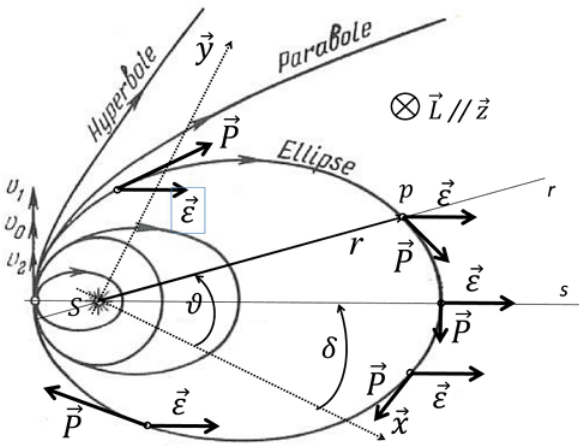
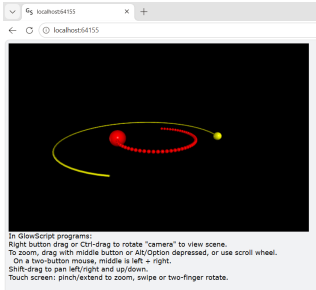


Figura 1.2: Fig. 1.1 in cui si è aggiunto l’asse di simmetria delle orbite s , parallelo al semiasse maggiore, ruotato di un angolo δ rispetto all’asse x . Il vettore $\vec{\epsilon}$ indicato qualitativamente in vari punti della traiettoria ellittica assieme al vettore quantità di moto $\vec{P}$, è il vettore di Runge-Lenz: quando la traiettoria conica è riferita agli assi, giace sull’asse x (fig. modificata da 13).

$$\vec{\eta}(t) = -mC\epsilon\hat{i} = \vec{P}(t) \times \vec{L} - mC\hat{r}(t) \quad \vec{\eta}(t) \cdot \vec{L} = 0$$

$$\eta = |\vec{\eta}(t)| = \sqrt{2mEL^2 + m^2C^2}$$

$$\vec{\eta}(t) \cdot \vec{r}(t) + mCr(t) = L^2 \Rightarrow \eta r(t) \cos \theta(t) + mCr(t) = L^2$$

3. dalla sovrapposizione fra il paradigma in cui il problema dei due corpi è di tipo differenziale, basato sui principi della dinamica (Par. 1.1), e quello in cui è di tipo integrale, basato sui principi di conservazione (Par. 1.1.2), è emerso un aspetto che diventa evidente solo dalla teoria di Bohr-Sommerfeld: i problemi differenziali portano ad equazioni orarie, soluzioni parametriche nel tempo che i ragazzi conoscono fin dai moti rettilinei; l'approccio basato sugli invarianti porta invece a luoghi geometrici, traiettorie dove il tempo scompare (come in meccanica quantistica), risultato nuovo per uno studente;

Una classificazione grafica delle orbite si ottiene isolando la parte di energia cinetica dovuta al solo spostamento radiale:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} - \frac{C}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{CL^2}{Cmr^2} - \frac{C}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + C\left(\frac{1}{2}\frac{p}{r^2} - \frac{1}{r}\right) \quad (1.24)$$

Fissato quindi il valore di E , i valori di r che soddisfano l'equazione:

$$E = f(r) = C\left(\frac{1}{2}\frac{p}{r^2} - \frac{1}{r}\right) \iff \dot{r} = 0 \quad (1.25)$$

sono le distanze r in cui non c'è spostamento radiale, ossia il pianeta smette di allonta-/avvicinarsi da-/a-l sole perché la sua traiettoria curva, cambiando segno $\dot{r}$.

• se $\epsilon < 1$, l'orbita è ellittica e $E_C < E < 0$:

$$1 > \epsilon = \sqrt{1 + 2\frac{EL^2}{mC^2}} = \sqrt{1 - \frac{E}{E_C}} > 0 \Rightarrow E_C = -\frac{mC^2}{2L^2} < E < 0 \quad (1.18)$$

pertanto, l'orbita circolare per $\epsilon = 0$ ha energia E_C minima. Semiassi a, b , e semidistanza focale c sono:

$$a = \frac{C}{2|E|} \quad b^2 = \frac{L^2}{2m|E|} \quad c^2 = a^2 - b^2 = \frac{C^2}{4E^2} - \frac{L^2}{2m|E|} = a^2\epsilon^2 \quad (1.19)$$

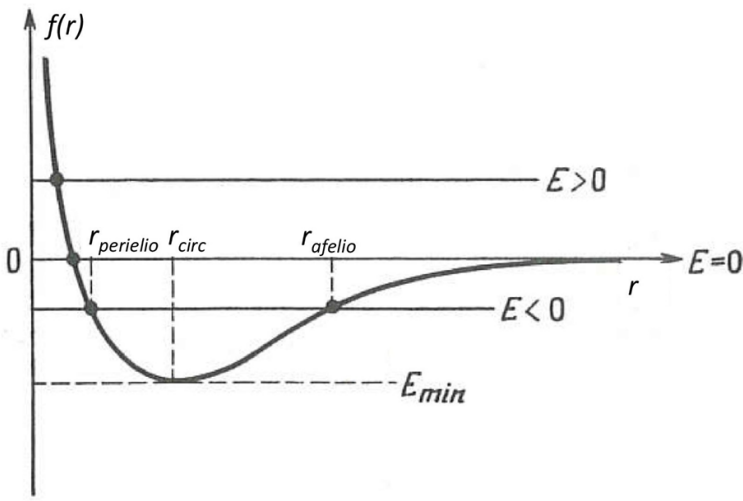


Figura 1.3: Soluzione grafica dell'Eq. 1.25; le intersezioni forniscono le distanze r di perielio ed afelio dell'orbita 1.3.

Si trovano così afelio (+) e perielio (-):

$$a \pm c = \frac{C}{2|E|} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4E^2} - \frac{L^2}{2m|E|}} = a(1 \pm \epsilon) \quad (1.20)$$

mentre il rapporto fra l'area πab e la velocità areolare, costante, dà il periodo T del moto (III legge di Kepler):

$$T = \frac{\pi ab}{\frac{dA}{dt}} = \frac{\pi}{\frac{L}{2m}} \frac{C}{\sqrt{2m|E|}} = \pi C \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} = 2\pi C \sqrt{\frac{ma^3}{C^3}} \quad (1.21)$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{C} a^3 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 = \gamma_{Sole} a^3$$

4. il punto precedente apre possibilità interdisciplinari di storia della fisica e della matematica: lo stesso Kepler, che partì dalla forma delle orbite, determinata sperimentalmente, si trovò a dover ricostruire l'equazione oraria del moto dei pianeti partendo dalle proprietà dell'ellisse (Par. 1.1.3; per una recente trattazione didattica, [11]), risolta numericamente con l'aiuto del matematico-orologiaio svizzero Jost Bürgi;

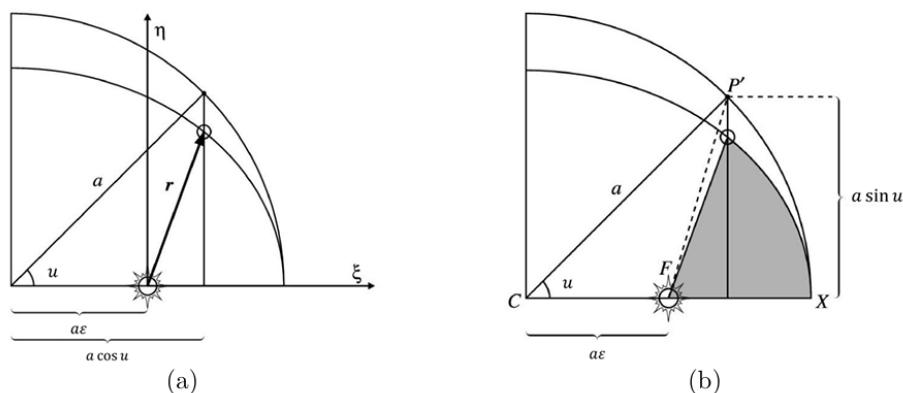


Figura 1.4: Costruzione geometrica per la definizione degli angoli *anomalia vera* θ , *eccentrica* u e *media* Φ : l'orbita ellittica del corpo in moto è inscritta in un cerchio di raggio a , avente lo stesso centro dell'ellisse. La costruzione è riferita a due diversi riferimenti: con l'origine nel Sole (quindi in un fuoco) 1.4(a); nel centro dell'ellisse 1.4(b) (leggermente modificato da [16]).

In sostanza, noti il semiasse maggiore a , l'eccentricità ϵ ed il periodo T , calcolati in base alle condizioni iniziali del pianeta (posizione e velocità) nel sistema in cui il Sole è nell'origine, invece di ottenere un'equazione oraria esplicita:

- noto T , si calcola $\Phi(t) = 2\pi \frac{t-t_0}{T}$ (Eq. 1.32);
- nota ϵ , si inverte l'equazione di Kepler Eq. 1.34, trovando $u(\Phi)$;
- da u si trova $\theta(u) = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \tan \frac{u}{2} \right)$, Eq. 1.36;
- nota a , da θ si trova $r(\theta) = a \frac{1-\epsilon^2}{1+\epsilon \cos \theta}$ (Eq. 1.31), e volendo (x, y) .

$$\Phi = u - \epsilon \sin u$$

5. l'insieme degli ostacoli finora elencati ha suggerito la strategia per il resto del lavoro: *cambiare riferimento per riuscire a vedere quanto previsto dai modelli (Par. 1.1.4).* Ciò è avvenuto praticamente in tre fasi:

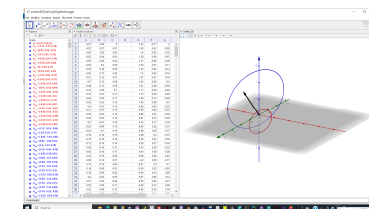
- inizialmente si è avuta la sorpresa di scoprire che passando dal riferimento in cui uno dei due corpi è fermo, in genere non inerziale, ad un qualunque sistema inerziale, i due corpi possono inseguirsi su spirali ellittiche conservando gli invarianti previsti. Ciò ha fornito la ragione per introdurre il sistema inerziale del Centro di Massa (CdM), come si fa solitamente in gravitazione (Par. 1.1.4);

Riferimenti: inerziale, siderale... 2D
<https://insightmaker.com/insight/CFUT3ptZa0XBR2vH0BQsL>

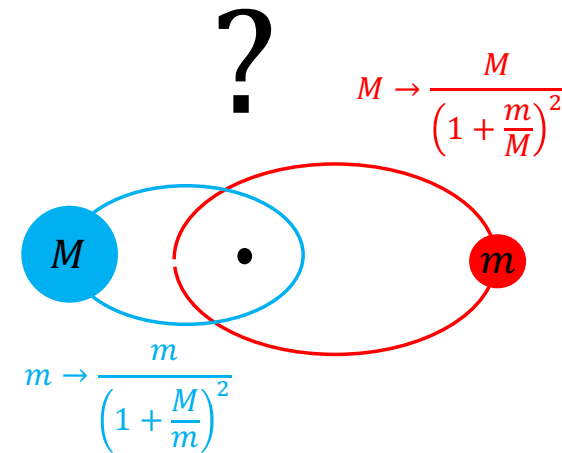
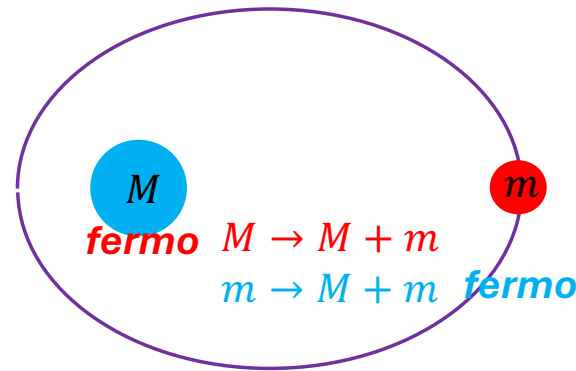
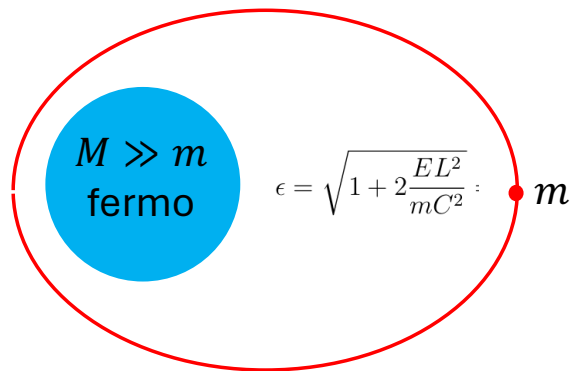
```

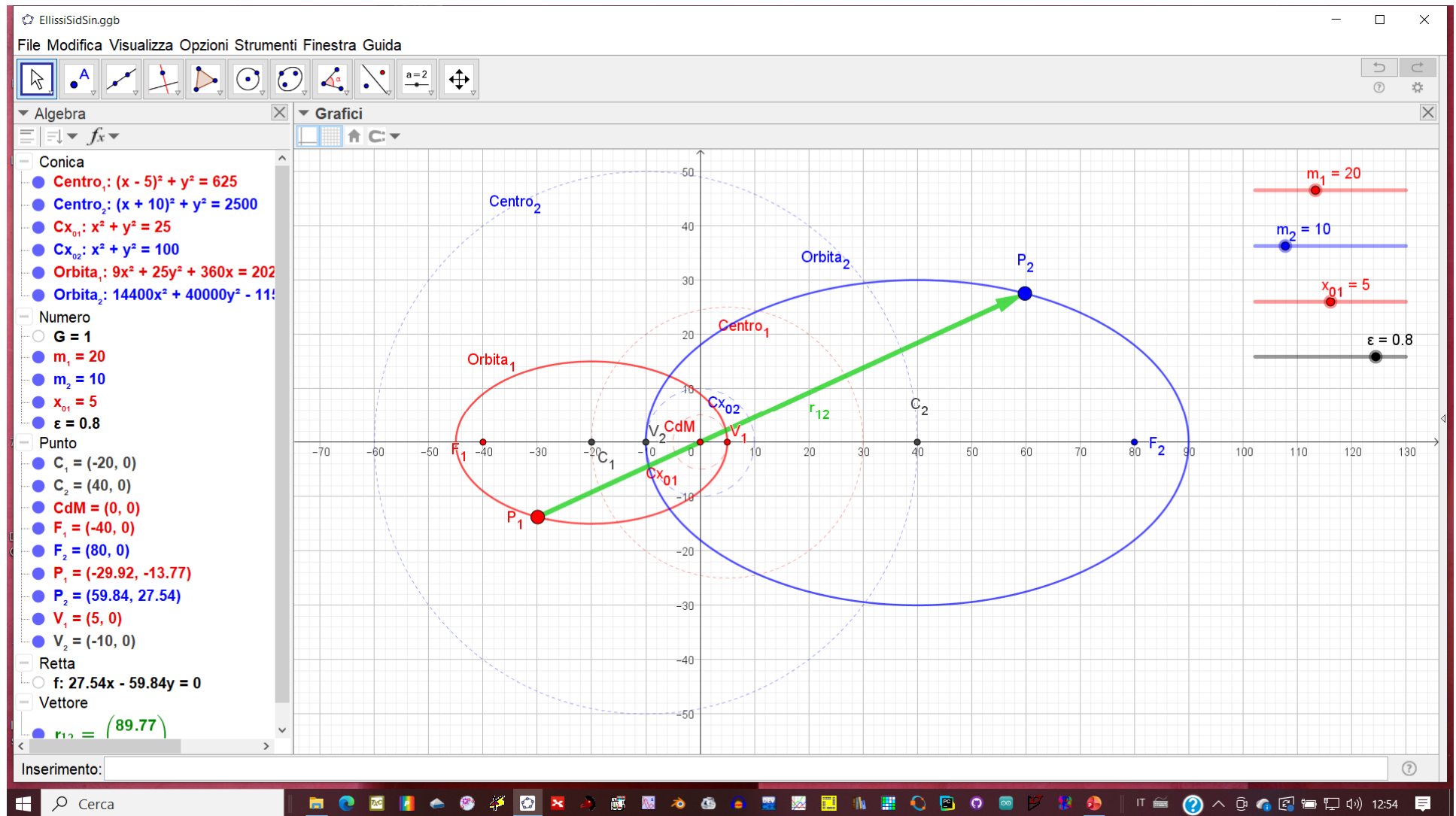
1 // Problema dei due corpi nel riferimento del centro di massa, CdM
2
3 #include <iostream>
4 #include <fstream>
5 #include <cmath>
6 #include <string>
7 #include <vector>
8 using namespace std;
9
10 const int P = 110000;
11 double G, m1, m2;
12 double T[P],
13 double X1[P], Y1[P], Z1[P], Vx1[P], Vy1[P], Vz1[P], Ec1[P], Et1[P], Lx1[P], Ly1[P], Lz1[P], Lt1[P];
14 double X2[P], Y2[P], Z2[P], Vx2[P], Vy2[P], Vz2[P], Ec2[P], Et2[P], Lx2[P], Ly2[P], Lz2[P], Lt2[P];
15 double Et[P], Et[P], Lt[P];
16 double ax1, ay1, az1, Epot, Ec1n, Lax1, Lay1, Laz1;
17 double ax2, ay2, az2, Ec1n2, Lax2, Lay2, Laz2;
18 double x0, y0, z0;
19 double vx0, vy0, vz0;
20 double v1c1r, v2c1r;
21
22 void RK(const double T1, const double T2, const double X01, const double Y01, const double Z01, const double Vx01, const double Vy01, const double Vz01, const double X02, const double Y02, const double Z02, const double Vx02, const double Vy02, const double Vz02, const double dt);
23 void RKSTEP(double t, double x1, double vx1, double y1, double vy1, double z1, double vz1, double x2, double vx2, double y2, double vy2, double z2, double vz2, const double dt);
24
25 double acc(double x1, double y1, double z1, double x2, double y2, double z2, double vx1, double vx2, double vy1, double vy2, double vz1, double vz2);
26 double vel(double x1, double y1, double z1, double vx1, double vx2, double vy1, double vy2, double vz1, double vz2);
27 double Ec(double x1, double y1, double z1, double vx1, double vx2, double vy1, double vy2, double vz1, double vz2);
28 double Ec1n(double vx, double vy, double vz, double Ec1n);
29 double Ec2n(double vx, double vy, double vz, double Ec2n);
30 double Lx(double x, double y, double z, double vx, double vy, double vz, double Lax, double Lay, double Laz);
31 double Lz(double x, double y, double z, double vx, double vy, double vz, double Lax, double Lay, double Laz);
32
33 int main()
34 {
35     double T1, T2, X01, Y01, Z01, Vx01, Vy01, Vz01, X02, Y02, Z02, Vx02, Vy02, Vz02;
36     int Nt, i;
37     ifstream ifile("input.txt");
38     while (!ifile.eof()) {
39         ifile >> G >> m1 >> m2 >> T1 >> T2 >> X01 >> Y01 >> Z01 >> Vx01 >> Vy01 >> Vz01 >> X02 >> Y02 >> Z02 >> Vx02 >> Vy02 >> Vz02;
40         ifile.close();
41         if (Nt < 0) { cerr << "Error : Nt < 0\n"; exit(1); }
42     }
43 }

```



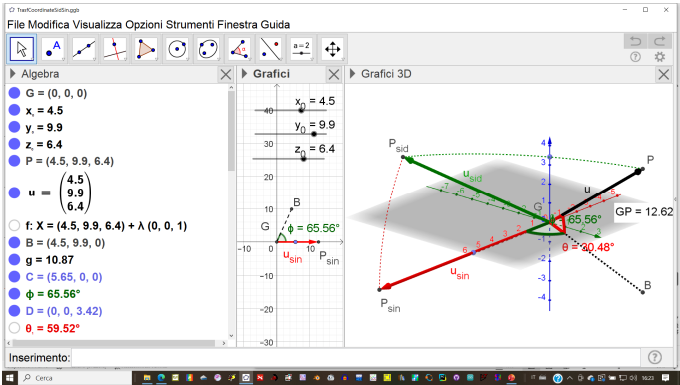
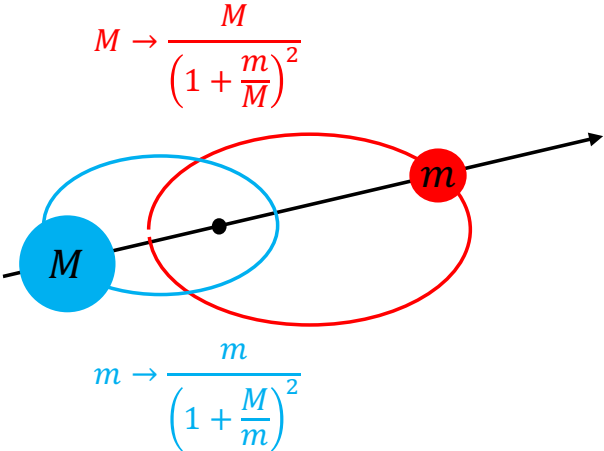
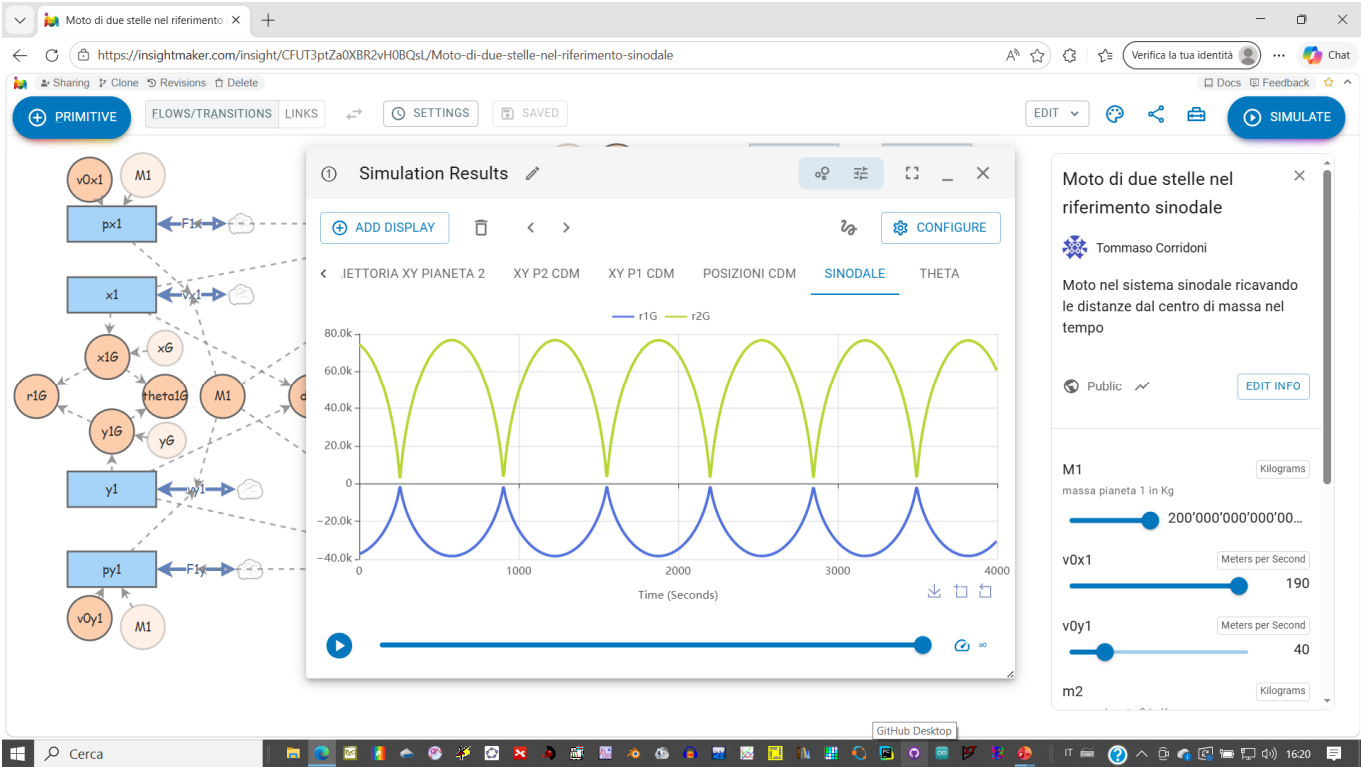
- la seconda fase è nata da una domanda molto più interessante: *la caratterizzazione della forma delle orbite al variare di energia e momento angolare è stata trovata nel riferimento non inerziale in cui uno dei due corpi è fermo. Come si estende al sistema del CdM, in cui nel caso generale entrambi i corpi sono in moto ?* Tale problema viene sempre "liquidato" introducendo la distanza relativa e la massa ridotta. Tuttavia didatticamente ciò non funziona, perché *non viene riconosciuto il trasferimento del modello già costruito, che vuole un punto fermo ed uno in moto. Quello che occorre chiedersi è: quale massa efficace devo assegnare al CdM dei due corpi, affinché ciascuno di essi veda in esso solo un "sole" fermo, ed abbia quindi un'orbita descritta dal modello già visto ?* La risposta è stata dimostrata, evidenziando un aspetto della geometria delle orbite mai (forse) menzionato: sono omotetiche rispetto al CdM (Par. 1.1.4);





- la terza fase è nata nello studio del problema dei 3 corpi: prima si è scoperto che il riferimento sinodale (Par. 1.1.4), data la geometria del problema a due soli corpi, è definibile sia nel caso ideale, sia in quello reale, poi che è comunque raggiungibile mediante una doppia rotazione nello spazio (Par. 1.1.5), complessa in termini differenziali, ma molto diretta ed efficace nella grafica 3D;

Riferimenti: inerziale, siderale, sinodale, 2D
<https://insightmaker.com/insight/CFUT3ptZa0XBR2vH0BQsL>



6. raggiunto il problema dei 3 corpi (Cap. 3), le difficoltà algebriche anche nel solo problema circolare ridotto, dovute all'introduzione della costante di Jacobi, delle zone di Hill e soprattutto dei punti di Lagrange (Par. 3.3.1), hanno nascosto i dubbi di apprendimento più interessanti per la didattica, riemersi tuttavia nella necessità di costruire unità di misura ragionevoli per le simulazioni o nella lenta e graduale presa di coscienza che una simulazione è sempre e comunque un falso, soprattutto per problemi dei quali, come oramai noto, non esiste soluzione esplicita.

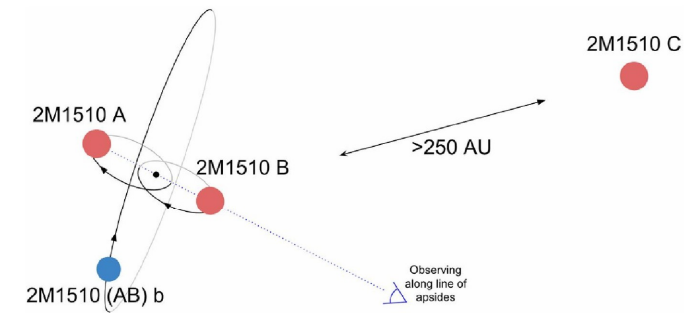
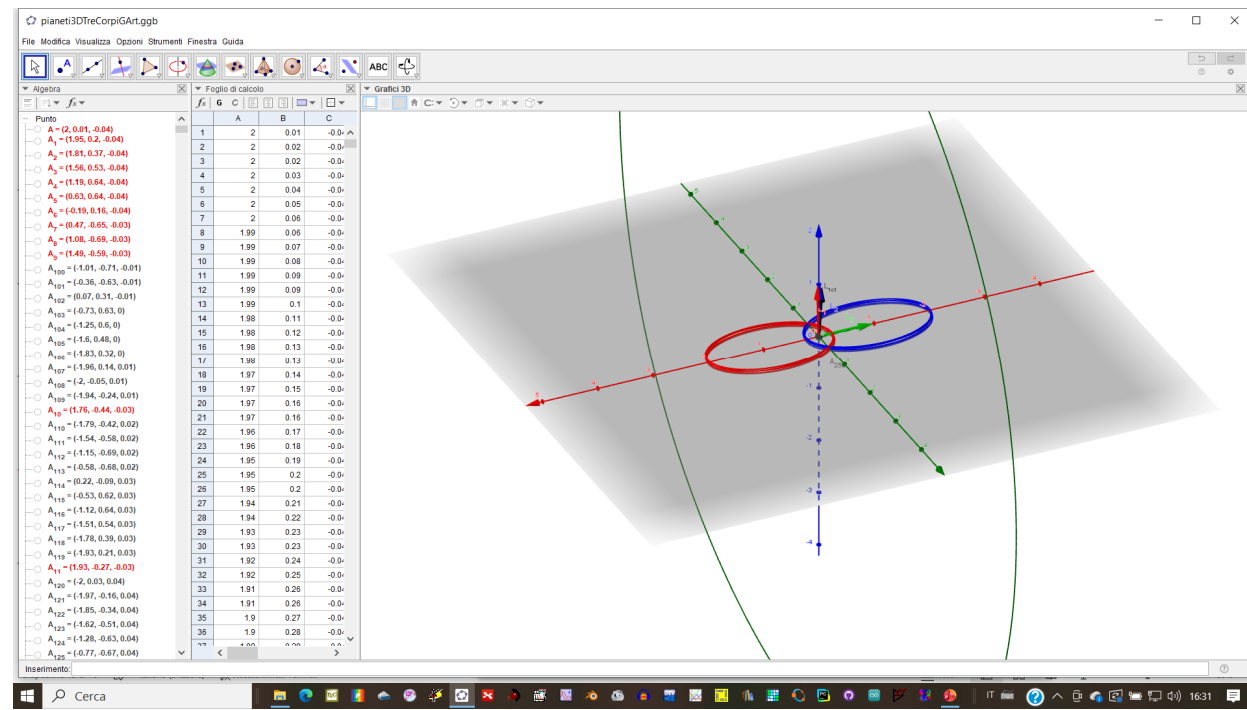
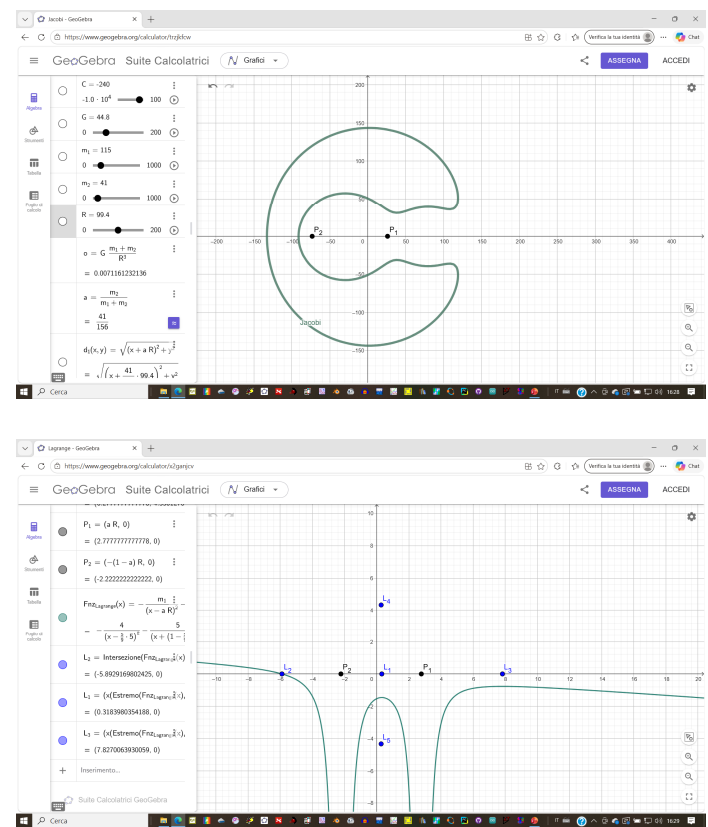


Fig. 5. Configuration of 2M1510 and naming convention for the various bodies. Brown dwarfs are in red, and the planet is in blue. Direction to Earth relative to the binary is shown.



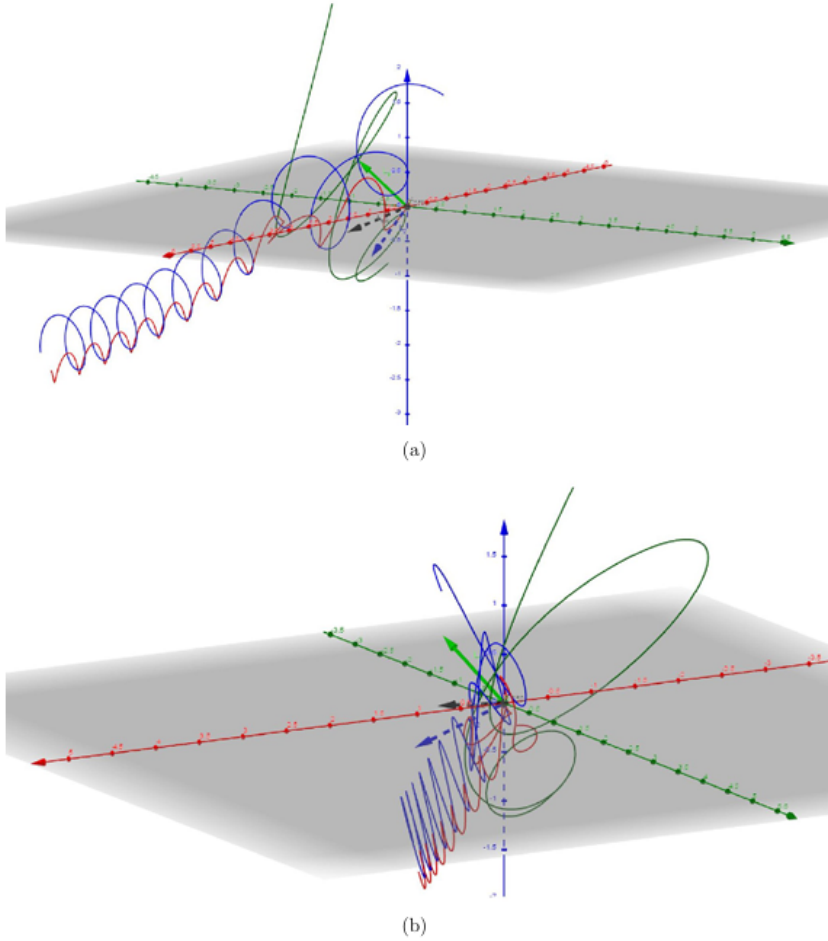


Figura 4.2: Rappresentazioni 3D (da Geogebra) dei risultati di simulazioni C++ del sistema Sole-planet mostrate nelle Fig. 2.22(a) e 2.23 ($m_1 = 10000.0, m_2 = 4000, T_i = 0.0, T_f = 0.5, Nt = 2000, x_{01} = 0.0, y_{01} = 0.0, z_{01} = 0.0, v_{0x1} = 0.0, v_{0y1} = 0.0, v_{0z1} = 0.0, x_{02} = 2.0, y_{02} = 2.0, z_{02} = 2.0, v_{0x2} = 8.0, v_{0y2} = -16, v_{0z2} = 12$), qualora interagisca con un terzo corpo con $x_{03} = -1.0, y_{03} = -1.0, z_{03} = -1.0, v_{0x3} = 28, v_{0y3} = -20, v_{0z3} = -30$ e massa $m_3=2000$, in un riferimento inerziale 4.2(a) o nel CdM 4.2(b). Le unità sono tali che la costante di gravitazione universale sia $G = 1$. I vettori sono i versori dei momenti angolari iniziali: blu, corpo 2; verde corpo 3; nero, totale.

Figura 4.3: Andamenti nel tempo di energia totale e momento angolare totale (in unità di misura nominali indicate fra virgolette, in quanto scalate di costanti in modo tale che $G = 1$) nelle simulazioni C++ del sistema Sole-planet nelle Figg. 4.1 e 4.2 per il sistema di Fig. 4.1(b) Energia totale nel CdM 4.3(a) e Momento angolare totale nel CdM, 4.3(b) per il sistema di Fig. 4.2(b) Energia totale nel CdM 4.3(c) e Momento angolare totale nel CdM, 4.3(d).

